**前**

# 令和8年度学力検査問題

# 数　学

120 分 間

**注 意 事 項**

1. 問題冊子は1ページと2ページである。
2. 解答用紙は $\boxed{\text{前}\ |\ 11}$, $\boxed{\text{前}\ |\ 12}$, $\boxed{\text{前}\ |\ 13}$, $\boxed{\text{前}\ |\ 14}$, $\boxed{\text{前}\ |\ 15}$ の5枚である。
3. 解答用紙5枚すべてに受験番号を記入すること。なお，氏名は記入しないこと。
4. 解答は裏面を使用せず，表面の指定された箇所に書くこと。
5. 解答用紙は5枚すべて提出すること。
6. 草案用紙は1枚である。計算などに利用し持ち帰ること。

**1.** $a$, $b$, $c$, $d$を定数とする。関数$f(x)$を$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$と定める。また，関数$f(x)$が$x=-1$で極小値0，$x=0$で極大値1をとるとする。

(1) $a$, $b$, $c$, $d$の値を求めよ。

(2) 関数$f(x)$の$x=t$での極値$f(t)$を求めよ。ただし，$t$は$-1$と0を除く。

(3) (2)の$t$に対し，定積分$\int_{-1}^{t} f(x)dx$を求めよ。

**2.** 関数$f(x)$, $g(x)$を$f(x)=xe^x$, $g(x)=xe^{x^2}$と定める。ただし，対数は自然対数とし，$e$は自然対数の底とする。

(1) $x>0$に対して，関数$h(x)$を$h(x)=\log f(x)-\log g(x)$と定める。関数$h(x)$を$x$の多項式として表せ。

(2) $f(x)=g(x)$を満たす実数$x$をすべて求めよ。

(3) 曲線$y=f(x)$と曲線$y=g(x)$で囲まれた図形の面積$S$を求めよ。

**3.** 数列$\{a_n\}$は

$$a_1=1, \qquad a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+2} \qquad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

を満たすとする。

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおく。$b_{n+1}$を$b_n$を用いて表せ。

(2) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $n \geqq 3$を満たす，すべての自然数$n$に対して，$a_n<\dfrac{1}{3n}$となることを，数学的帰納法によって示せ。

**4.** $z$, $w$ を $0$ ではない複素数とし，$z^2+2\sqrt{3}\,zw+4w^2=0$ を満たすとする。ただし，$i$ は虚数単位とする。

(1) $\dfrac{z}{w}$ の値をすべて求めよ。

(2) $a$ を正の実数とし，$z=ai$ とする。このとき，$w$ の偏角 $\theta$ を $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲ですべて求めよ。

**5.** 実数 $t$ に対し，3点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(2t+3,\ t)$，$\mathrm{C}(4,\ 3)$ を考える。また，直線 $l$ の方程式を $x-2y-3=0$ とする。

(1) 点Aと点Bは直線 $l$ 上の点であることを示せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $t$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる $t$ の値 $t_1$ を求めよ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ の最小値を求めよ。また，その最小値となる $t$ の値 $t_2$ を求めよ。

## ［出題意図］

本学において，募集要項でも述べている通り，豊かな教養と幅広い専門知識を身につけ活用するための基礎的能力を有する人材を求めている．本科目において，様々な知識を蓄え，研究を展開する上で不可欠な論理的思考能力を問うことを目的としている．したがって，答えのみではなく，答えに至るまでの議論を正しく明確に述べることが望ましい．また，各大問では，高等学校等で習得すべき基礎的な知識を用いて解ける問題を中心に出題し，様々な分野における基礎となる計算能力の確認も目的としている．

## ［解答例］

**1．** ⑴ $f(-1)=0,\ f'(-1)=0,\ f(0)=1,\ f'(0)=0$ より

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d,$$
$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$$

に代入すると

$$f(-1)=1-a+b-c+d=0,$$
$$f'(-1)=-4+3a-2b+c=0,$$
$$f(0)=d=1,$$
$$f'(0)=c=0$$

である．整理すると $2-a+b=0, -4+3a-2b=0$ より $a=0,\ b=-2.$
以上から，$a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=1$ である．

⑵ (1) から $f(x)=x^4-2x^2+1$ より

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1),\ f''(x)=12x^2-4$$

なので，$f'(1)=0, f''(1)=8>0$ より $x=1$ で極小で極小値 $f(1)=0$ である．
よって，$t=1$ であり，極値は $f(1)=0$ である．

⑶

$$\int_{-1}^{t} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)dx = 2\int_0^1 (x^4-2x^2+1)dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right) = \frac{16}{15}.$$

**2．** ⑴

$$h(x) = \log(xe^x) - \log(xe^{x^2}) = \log x + \log e^x - (\log x + \log e^{x^2}) = x - x^2$$

である．

⑵ $xe^x = xe^{x^2}$ より $x(e^x - e^{x^2}) = 0$ なので，$x = 0$ または $e^x - e^{x^2} = 0$ となる．$e^x - e^{x^2} = 0$ のとき，$e^x = e^{x^2}$ より $x = x^2$ なので $x = 0$ または $x = 1$ である．よって，$f(x) = g(x)$ をみたす実数は $x = 0$ または $x = 1$ である．

⑶ 交点は (2) より $x = 0$，$x = 1$ なので，$0 \leqq x \leqq 1$ に対して，$x \geqq x^2$ より $f(x) \geqq g(x)$ よって，面積 $S$ は

$$S = \int_0^1 (f(x)-g(x))dx = \int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 xe^{x^2}dx$$

ここで，部分積分法より

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x = e - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

また，

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}.$$

よって，

$$S = 1 - \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e.$$

**3．** ⑴ $a_n = \dfrac{1}{b_n}$ より

$$b_{n+1} = \frac{3a_n+2}{a_n} = 3 + \frac{2}{a_n} = 3 + 2b_n.$$

⑵ $b_{n+1}+3=2(b_n+3), b_1=1$ なので $b_n=2^{n-1}\cdot 4-3=2^{n+1}-3$ である．よって，$a_n=\dfrac{1}{2^{n+1}-3}$.

⑶ $n \geqq 3$ を満たす，全ての自然数 $n$ に対して，

$$a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}<\frac{1}{3n}\cdots①$$

となることを示す.

$n=3$ のとき,

$$\frac{1}{2^4-3}=\frac{1}{13}<\frac{1}{9}$$

より, ① は $n=3$ のときに成り立つ.

$k \geqq 3$ を自然数とする．① が, $n=k$ のときに成り立つと仮定する．すなわち,

$$\frac{1}{2^{k+1}-3}<\frac{1}{3k}$$

と仮定する．よって，$3k<2^{k+1}-3$，つまり，$3k+3<2^{k+1}$ が成り立つ.

ここで,

$$2^{k+2}-3=2\cdot 2^{k+1}-3>2(3k+3)-3=6k+6-3$$
$$=3k+3+3k=3(k+1)+3k>3(k+1)$$

より,

$$\frac{1}{2^{k+2}-3}<\frac{1}{3(k+1)}$$

が成り立つ．よって，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ．従って，数学的帰納法より, $n \geqq 3$ をみたす，全ての自然数 $n$ に対して，① が成り立つ.

**4.** ⑴ $x^2+2\sqrt{3}zw+4w^2=0$ より

$$\left(\frac{z}{w}\right)^2+2\sqrt{3}\ \frac{z}{w}+4=0$$

なので $\dfrac{z}{w}=-\sqrt{3}\pm i$ である.

(2) $w$ を $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく．ただし，$r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi$ とする．

$$z=ai=a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

であり，

$$-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

なので，(1) より $z=(-\sqrt{3}+i)w$ から

$$a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2r\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi+\theta\right)+i\sin\left(\frac{5}{6}\pi+\theta\right)\right).$$

よって，$a=2r,\ \dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5}{6}\pi+\theta+2n\pi$　($n$ は整数) より $\theta=-\dfrac{\pi}{3}-2n\pi$ である．
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲から $\theta=\dfrac{5}{3}\pi$ となる．
また，

$$-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$

なので，(1) より $z=(-\sqrt{3}-i)w$ から

$$a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2r\left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi+\theta\right)+i\sin\left(\frac{7}{6}\pi+\theta\right)\right).$$

よって，$a=2r,\ \dfrac{\pi}{2}=\dfrac{7}{6}\pi+\theta+2n\pi$　($n$ は整数) より $\theta=-\dfrac{2\pi}{3}-2n\pi$ である．
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲から $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$ となる．
以上から，$\theta=\dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ である．

**5.** (1) 直線 $l$ の方程式 $x-2y-3=0$ に $\mathrm{A}(3,0),\ \mathrm{B}(2t+3,t)$ を代入すると

$$3-0-3=0,\ 2t+3-2t-3=0$$

となるので，点 A と点 B は $l$ 上の点である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2t,t),\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(1-2t,3-t)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2t-4t^2+3t-t^2=-5t^2+5t$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\neq0,|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\neq0$ である．よって，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる $t$ の値は $t_1=1$ である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (1-2t, 3-t)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{(1-2t)^2 + (3-t)^2} = \sqrt{10 - 10t + 5t^2} = \sqrt{5(t-1)^2 + 5}$$

である．よって，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ の最小値は $\sqrt{5}$ で最小値となる $t$ の値は $t_2 = 1$ である．