前

令和7年度学力検査問題

数　学

120 分 間

注 意 事 項

1. 問題冊子は1ページと2ページである。
2. 解答用紙は 前 11 ， 前 12 ， 前 13 ， 前 14 ， 前 15 の5枚である。
3. 解答用紙5枚すべてに受験番号を記入すること。なお，氏名は記入しないこと。
4. 解答は裏面を使用せず，表面の指定された箇所に書くこと。
5. 解答用紙は5枚すべて提出すること。
6. 草案用紙は1枚である。計算などに利用し持ち帰ること。

1. a を定数とし，$a>0$ とする。関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{x}$ と定める。また，曲線 $y=f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における接線を l とする。

(1) 接線 l の方程式を求めよ。

(2) 接線 l と x 軸との交点の座標を $(b,\ 0)$ とする。b を a を用いて表せ。

(3) (2)の b に対し，x 軸，2直線 $x=a$，$x=b$ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積 S を求め，S が a によらない値であることを示せ。

2. 関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と定める。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f''(x)$ を求め，$f(x)$ は下に凸であることを示せ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の2点 $\mathrm{P}(0, f(0))$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\pi}{4}, f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ を通る直線を l とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 l で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

3. a，b を実数の定数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=(x-1)(x^2+2ax+b)$ と定める。

(1) $f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつための a と b に関する必要十分条件を求めよ。

(2) $f(x)=0$ が異なる3つの実数解をもつための a と b に関する必要十分条件を求めよ。

(3) $f(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつための a と b に関する必要十分条件を求めよ。

4. 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 4, \quad a_{n+2} = 10a_{n+1} - 24a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすとする。

(1) すべての自然数 n に対して

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

を満たす実数 α と β の組 (α, β) を2組求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

5. x を実数とし，4点 $\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{C}(3,\ 5,\ -2)$，$\mathrm{P}(x,\ 0,\ 2-x)$ を考える。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を成分表示せよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす x と実数 s，t を求めよ。

(3) 3点A，B，Cが定める平面ABC上に点Pがあるとする。直線APと直線BCの交点Qの座標を求めよ。

[出題意図]

本学においては，募集要項でも述べている通り，豊かな教養と幅広い専門知識を身につけ活用するための基礎能力を有する人材を求めている．本科目においては，基本的な計算能力だけでなく，様々な知識を蓄え，研究を展開する上で不可欠な論理的思考能力を問うことを目的としている．したがって，答えに至るまでの議論を正しく明確に述べることが望ましい．また，各大問では，高等学校等で習得すべき基礎的な知識を用いて解ける問題を中心に出題し，様々な分野における基礎となる計算能力の確認も目的としている．

[解答例]

1． ⑴ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ より $f(a) = \dfrac{1}{a}$ である．また，$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ より $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$ である．したがって，接線 l の方程式は $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ で与えられるため，

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

⑵ $(b, 0)$ を接線 l の方程式に代入すると

$$0 = -\frac{1}{a^2}b + \frac{2}{a}$$

となる．この式を整理すると，$b = 2a$ を得る．

⑶ $f(x) > 0$ $(x > 0)$ の関係式と $a > 0$ より，問題文の図形の面積 S は $S = \displaystyle\int_a^{2a} \frac{1}{x}\,dx$ で与えられる．したがって，

$$S = \int_a^{2a} \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_a^{2a} = \log 2a - \log a = \log 2.$$

よって，面積 S は a によらずに $\log 2$ となる．

2． ⑴ $f(x) = (\cos x)^{-2}$ なので，

$$f'(x) = -2(\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

である．

(2) (1) より

$$f''(x) = \frac{(2\sin x)'\cos^3 x - 2\sin x(\cos^3 x)'}{(\cos^3 x)^2}$$
$$= \frac{(2\cos x)\cos^3 x - 2\sin x(-3\cos^2 x\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ において，$\sin^2 x \geqq 0, \cos^2 x > 0, \cos^4 x > 0$ であるから，$f''(x) > 0$ となる．したがって，$f(x)$ は下に凸である．

(3) $f(0) = \dfrac{1}{\cos^2 0} = 1, f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$ であるから，直線 l の方程式は

$$y = \frac{f(\frac{\pi}{4}) - f(0)}{\frac{\pi}{4} - 0}(x - 0) + f(0) = \frac{4}{\pi}x + 1$$

である．また，(2) より $f(x)$ は下に凸なので，$0 < x < \frac{\pi}{4}$ において曲線 $y = f(x)$ は直線 l の下側にある．よって，問題文の図形の面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \left(\frac{4}{\pi}x + 1\right) - \frac{1}{\cos^2 x} \right\} dx = \left[\frac{2}{\pi}x^2 + x - \tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{8}\pi - 1.$$

3. (1) $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解を持つための必要十分条件は $x^2 + 2ax + b = 0$ が「重解 $x = 1$ を持つ $\cdots$ ① 」か，または「実数解を持たない $\cdots$ ②」である．

① は

$$x^2 + 2ax + b = (x - 1)^2$$

となることと同値なので，係数比較により $a = -1$ かつ $b = 1$ であることと同値であることがわかる．一方，② は 2 次方程式に対する解の個数の判定法より，$a^2 - b < 0$ と同値である．よって，問題文の必要十分条件は「$a = -1$ かつ $b = 1$」または「$a^2 - b < 0$」である．

(2) $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解を持つための必要十分条件は $x^2 + 2ax + b = 0$ が「異なる 2 つの実数解を持ち $\cdots$ ①」かつ「2 つの実数解がいずれも 1 でない $\cdots$ ②」である．① は 2 次方程式に対する解の個数の判定法より，$a^2 - b > 0$ と同値である．また，② は 2 次方程式の解の公式より $-a + \sqrt{a^2 - b} \neq 1$ かつ $-a - \sqrt{a^2 - b} \neq 1$ と同値である．よって，問題文の必要十分条件は $a^2 - b > 0$ かつ $-a + \sqrt{a^2 - b} \neq 1$ かつ $-a - \sqrt{a^2 - b} \neq 1$ である．

(3) $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解を持つための必要十分条件は $x^2+2ax+b=0$ が「1 以外の重解を持つ $\cdots$ ①」か，または「1 と 1 以外の実数を解として持つ $\cdots$ ②」である．まず，① について考察する．2 次方程式に対する解の個数の判定法より，重解を持つための必要十分条件は $a^2=b$ である．このとき，重解は $-a$ となるので，① は $a^2=b$ かつ $a\neq -1$ と同値である．一方，② は $x^2+2ax+b=(x-1)(x-b)$ となり，かつ，$b\neq 1$ となることと同値である．前者は係数比較により $1+2a+b=0$ と同値であることがわかるので，② は $1+2a+b=0$ かつ $b\neq 1$ と同値である．よって，問題文の必要十分条件は「$a^2=b$ かつ $a\neq -1$」または「$1+2a+b=0$ かつ $b\neq 1$」である．

4． (1) $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ は

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$$

と式変形できるので，$\alpha+\beta=10$ と $\alpha\beta=24$ をみたす組 (α,β) を 2 組求めれば良い．条件をみたす組は $(\alpha,\beta)=(4,6)$ と $(\alpha,\beta)=(6,4)$ である．

(2) (1) より数列 $\{a_n\}$ は

$$a_{n+2}-4a_{n+1}=6(a_{n+1}-4a_n)\quad (n=1,2,3,\cdots),\qquad a_2-4a_1=-8$$

をみたすので，$a_{n+1}-4a_n$ は公比が 6 で初項が -8 の等比数列である．したがって，$a_{n+1}-4a_n=-8\cdot 6^{n-1}\cdots$ ① となる．また，

$$a_{n+2}-6a_{n+1}=4(a_{n+1}-6a_n)\quad (n=1,2,3,\cdots),\qquad a_2-6a_1=-14$$

も成り立つので，$a_{n+1}-6a_n$ は公比が 4 で初項が -14 の等比数列である．したがって，$a_{n+1}-6a_n=-14\cdot 4^{n-1}\cdots$ ② となる．よって，$\dfrac{①-②}{2}$ より一般項は $a_n=7\cdot 4^{n-1}-4\cdot 6^{n-1}$ であることがわかる．

5. (1) 問題文の成分表示は以下の通りである．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (0-0, -1-2, 1-0) = (0, -3, 1),\\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (3-0, 5-2, -2-0) = (3, 3, -2),\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (x-0, 0-2, 2-x-0) = (x, -2, 2-x).\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は

$$\begin{cases} x = 3t, & \cdots ① \\ -2 = -3s + 3t, & \cdots ② \\ 2 - x = s - 2t & \cdots ③ \end{cases}$$

と同値である．① を ③ に代入すると

$$2 = s + t \quad \cdots ③'$$

を得る．$\dfrac{② + 3 \cdot ③'}{6}$ より $t = \dfrac{2}{3}$ を得る．これを ① に代入すると $x = 2$ を得る．
また，$\dfrac{3 \cdot ③' - ②}{6}$ より $s = \dfrac{4}{3}$ を得る．よって，$x = 2, s = \dfrac{4}{3}, t = \dfrac{2}{3}$ である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ がある実数 s, t に対して成り立つことが，点 P が平面 ABC 上にあることの必要十分条件であるから，(2) より $x = 2$ と

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots ④$$

が成り立つ．また，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と平行なので，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = u\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ をみたす実数 u がある．よって ④ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = u\overrightarrow{\mathrm{AP}} = u\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{4u}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2u}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となる．点 Q が直線 BC 上にあるための必要十分条件は

$$\frac{4u}{3} + \frac{2u}{3} = 1$$

であるので，$u = \dfrac{1}{2}$ となる．よって，$x = 2$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x, -2, 2-x)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1, -1, 0)$$

である．したがって A の座標は $(0, 2, 0)$ であったから，Q の座標は $(1, 1, 0)$ である．