２０２６年度４月入学試験<2026-2>

室蘭工業大学大学院工学研究科

博士前期課程　生産システム工学系専攻

航空宇宙総合工学コース

一般入学試験問題

数　学

13:00～15:00

注意事項：

大問１～６のうち５問を選択して答えよ

問題用紙・草稿用紙・答案用紙は全て回収する。

試験後に持ち帰らないこと。

受験番号	

数　学

問１から６のうち，５問を選択して答えよ。

１．次の式で定義される楕円体の体積を重積分を用いて求めよ。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

２．次の行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ について行列式を求めよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}.$$

３．次の複素平面上の無限遠方の上円弧経路 C_R と，実軸 $[-\infty,\infty]$ 上の経路 R を含む経路 C に関する以下の複素積分 I_Z について，以下の問いに答えよ。

$$I_z=\int_C \frac{dz}{z^4+1}$$
$$=\int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}+\int_R \frac{dz}{z^4+1}$$

（１）　この複素積分の被積分関数の特異点を全て求めよ。

（２）　前問で求めた特異点のうち，経路 C に含まれる特異点について，その留数を求めよ。

（３）　（２）の結果を用いて，次の実積分 I を求めよ。

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$$

４．位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)=a\cos t\,\boldsymbol{i}-a\sin t\,\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}$ $(a>0)$ が時刻 $t=0$ から $t=T$ までに描く曲線の長さ s を求めよ。

５．周期が 2π の $f(x)=|x|\ (-\pi \leq x \leq \pi)$ のフーリエ級数を求めよ。

６．次の関数のラプラス逆変換を求めよ。

$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$$

２０２６年度４月入学試験＜2026-2＞

室蘭工業大学大学院工学研究科

博士前期課程　生産システム工学系専攻

航空宇宙総合工学コース

一般入学試験問題

専門科目

9:00～11:30

注意事項：

大問１問につき答案用紙１枚で解答すること。

問題用紙・草稿用紙・答案用紙は全て回収する。

試験後に持ち帰らないこと。

工業力学，工業熱力学，流体力学，材料力学，制御工学，電気回路の６科目から２科目を選択。選択した科目名の左欄に○印を記入してください。○印の数は２個までです。

	工業力学		工業熱力学		流体力学		材料力学
	制御工学		電気回路				

受験番号	

工　業　力　学

1．以下の問いに答えよ。ただし，計算過程を記載すること。

（1）　図１のとおり，材質および厚さの一様な円板に三角形の穴が空いている。この物体の重心の座標を求めよ。

（2）　図２のとおり，大きさ F の $+z$ 方向の外力が点Ａにはたらいている。この外力によって線分 BC のまわりに生ずるモーメントの大きさを求めよ。

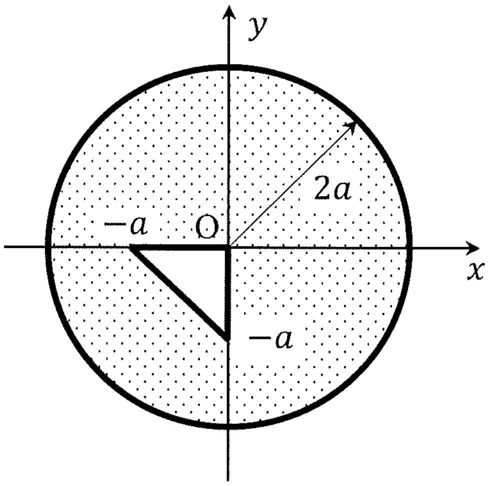


図１

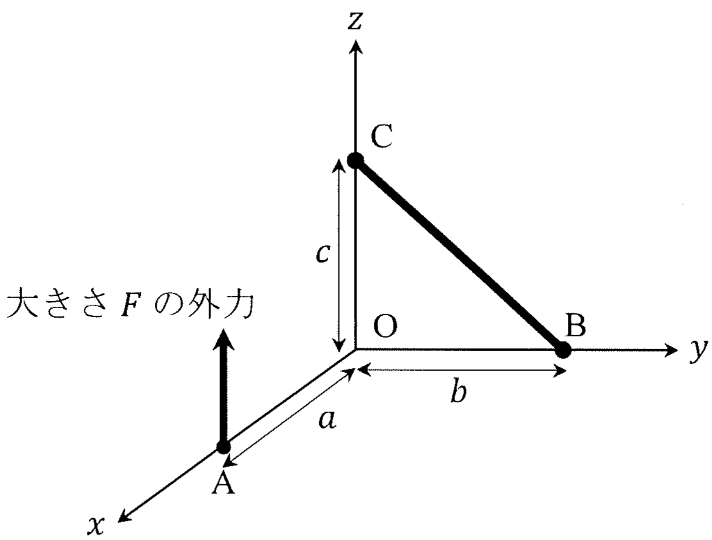


図２

2．図のように，半径 R，質量 M の均質な円柱が水平な床の上に置かれており，その中心はばね定数 k の軽いばねで剛体壁に接続されている。円柱の中心軸まわりの慣性モーメントを I とする。円柱には紐が巻き付けられており，紐の先には軽い滑車を介して質量 m のおもりが吊り下げられている。ばね，および円柱と滑車の間の紐は水平である。円柱は，中心軸のまわりに滑らかに回転しながら，床の上を滑らずに転がる。紐はたるんだり伸び縮みしたりしないものとする。ばねの自然長からの伸び，すなわち円柱の変位を x_1，円柱の回転角を θ，おもりの変位を x_2，重力加速度の大きさを g とする。このとき，以下の問いに答えよ。

（1）　円柱の変位 x_1 とおもりの変位 x_2 を，それぞれ R と θ を用いて表せ。なお，円柱が回転すると紐が繰り出されたり巻き取られたりすることに注意すること。

（2）　紐の張力を T，円柱と床の間の摩擦力を F とし，円柱の並進運動の運動方程式を記述せよ。

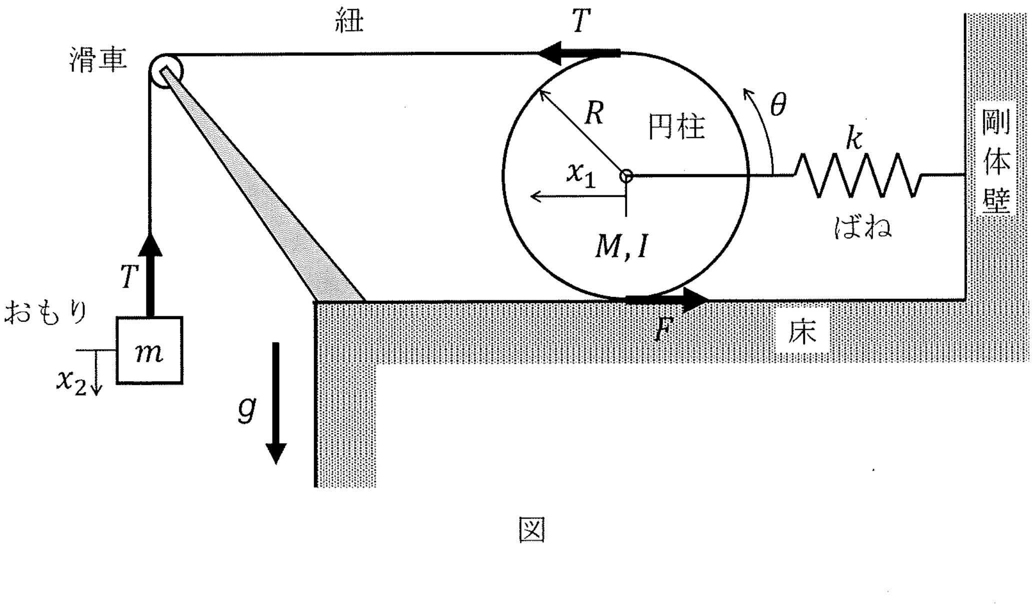
（3）　紐の張力を T，円柱と床の間の摩擦力を F とし，円柱の回転運動の運動方程式を記述せよ。

（4）　紐の張力を T とし，おもりの運動方程式を記述せよ。

（5）　おもりと円柱が静止して釣り合った状態における円柱の回転角 θ_0 を，m，R，k，g を用いて表せ。

（6）　$\theta' = \theta - \theta_0$ とおいて，円柱の回転振動の運動方程式を，θ'，M，I，m，R，k を用いて記述せよ。

（7）　円柱の回転振動の固有角振動数 ω を求めよ。



図

工 業 熱 力 学

1．以下の問いに答えよ。

（1） 質量が等しい二つの物体 A と B がある。物体 A の温度は一様で 20 ℃，物体 B の温度は一様で 80 ℃である。物体 A と B を接触させておいたところ，全体は一様な 40 ℃になった。物体 A の平均比熱を C_{A}，物体 B の平均比熱を C_{B} とするとき，$C_{\mathrm{A}}／C_{\mathrm{B}}$ はいくらか。

（2） ある経路 A を通って状態 1 から状態 2 へ変化し，次に別の経路 B を通って状態 2 から状態 1 へ戻るサイクルの熱機関を考える．ある経路 A を通って状態 1 から状態 2 へ変化した際，系に加えられた熱量は 250 J，またこのとき系が外界へした仕事は 200 J であった。次に別の経路 B を通って状態 1 に戻ってくる過程で，系が捨てた熱量が 100 J であったとすると，経路 B で系が外界にした仕事を求めよ。

（3） ある熱機関が電気出力 200 万 kW，熱効率 40 ％で発電しているものとする。高温熱源から熱機関に取り入れる単位時間あたりの熱量を Q_{H}，熱機関から低温熱源に放出する単位時間あたりの熱量を Q_{L} とするとき，Q_{H} と Q_{L} の値をそれぞれ求めよ。

2．圧力 p，比容積 v，気体の種類によって定まる気体定数 R，温度 T の理想気体を考える。以下の問いに答えよ。

（1） 内部エネルギ u が温度 T だけの関数とみなせるとして，比エンタルピ h が温度だけの関数となることを示せ。

（2） 定積比熱 c_v および定圧比熱 c_p を，比熱比 κ と R を用いてそれぞれ表せ。

（3） 理想気体の比熱と比熱比は温度によらず一定であるが，実在気体では 2 原子気体や多原子気体が広い温度範囲にわたり状態変化する場合は温度の関数になることが多い。その理由を述べよ。

3．図は，理想気体のガスタービンサイクルの$p-V$（圧力p，体積V）線図である。この図において理想的な（損失のない）ブレイトンサイクルは 1−2*−3−4*，実際の（一部損失のある）ガスタービンサイクルは 1−2−3−4 であるとする。受熱量をQ_1 [J]，放熱量をQ_2 [J]，動作流体の質量をm [kg]，定圧比熱をc_p [J/(kgK)]とする。また各点の温度[K]は図中の数字を添え字につけてT_1，T_{2*}，T_3，T_{4*}，T_2，T_4とする。以下の問いに答えよ。

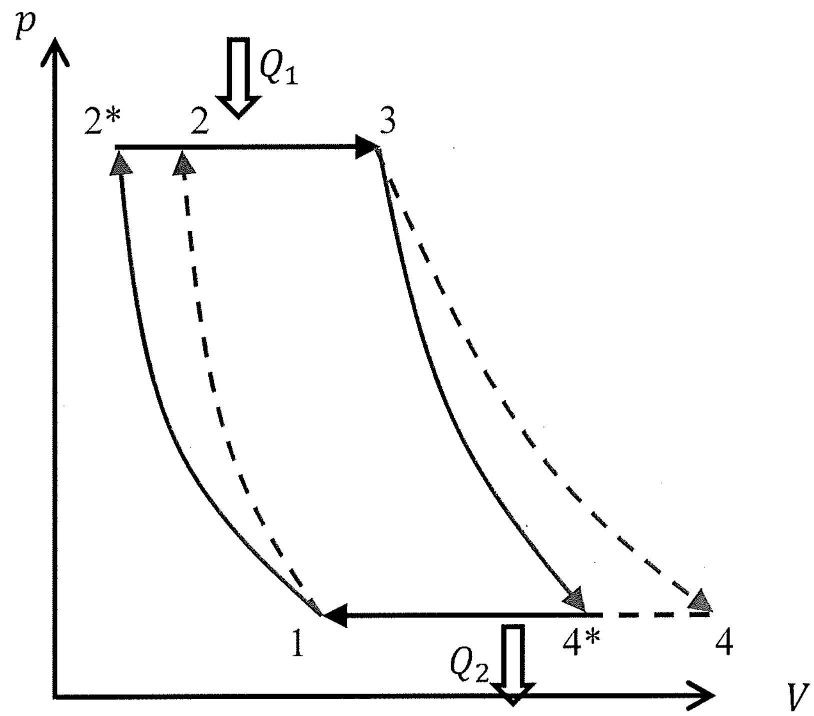
（1） 理想的なブレイトンサイクルのQ_1とQ_2を，m，c_p，T_1，T_{2*}，T_3，T_{4*}のいくつかを用いてそれぞれ表せ。

（2） ブレイトンサイクルの理論熱効率η_{th} [-]を，T_1，T_{2*}，T_3，T_{4*}をすべて用いて表せ。

（3） この理想的なガスタービンサイクル 1−2*−3−4*の$T-S$（温度T，エントロピS）線図を実線で描け。また，実際のガスタービンサイクル 1−2−3−4 の$T-S$線図を，理想的なガスタービンサイクルに重ねて点線で描け。なお，各点の状態を表す数字も示すこと。

（4） 圧縮機の断熱効率η_c [-]は，理想的な断熱圧縮仕事と実際の圧縮仕事との比で表される。η_cを，T_1，T_{2*}，T_2をすべて用いて表せ。

（5） タービンの断熱効率η_t [-]は，実際のタービンの膨張仕事と理想的な断熱膨張仕事との比で表される。η_tを，T_3，T_{4*}，T_4をすべて用いて表せ。



図

流　体　力　学

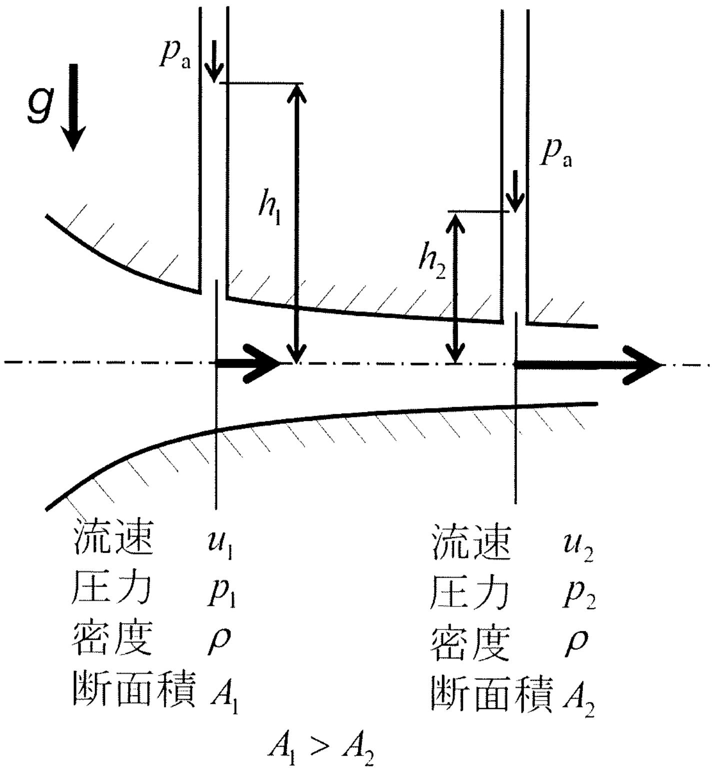
1．図に示すように，縮小ノズルにピエゾメータが取り付けられている。以下の問いに答えよ。なお流れは非圧縮性，一次元とし，断面内の流速分布等は考慮しないものとする。

（1）　質量保存の式をρ，A_1，A_2，u_1，u_2を用いて表せ。

（2）　ベルヌーイの式をρ，u_1，u_2，p_1，p_2を用いて表せ。

（3）　p_1をρ，大気圧p_a，ピエゾメータ内液面高さh_1，重力加速度gを用いて表せ。

（4）　ピエゾメータ内液面高さの差$|h_1 - h_2|$を体積流量$Q = A_1 u_1 = A_2 u_2$，A_1，A_2，および重力加速度gを用いて表せ。



図

2．図に示すように貯気槽から先細ノズルを通して気体が排出される場合において，以下の問いに答えよ。なお，気体のエントロピは保存され，位置エネルギーは無視するものとし，先細ノズル内および出口での流速は音速を上回らないものとする。さらに気体は理想気体とする。

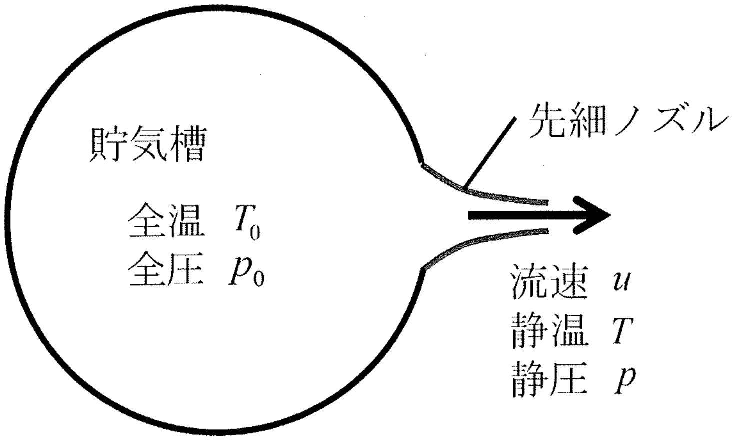
（1）　全エネルギー　$h+\frac{1}{2}u^2$ が保存されるとして，貯気槽内部と排出口の間で成り立つエネルギー保存式を，定圧比熱 C_p，貯気槽内全温度 T_0，先細ノズル出口での流速 u，静温度 T を用いて表せ。なお C_p は一定とする。ここで h は比エンタルピとする。

（2）　理想気体において成り立つ C_p，比熱比 γ および気体定数 R の関係を用い，以下の式を導出せよ。

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}RT_0=\frac{\gamma}{\gamma-1}RT+\frac{1}{2}u^2$$

（3）　等エントロピ過程で成り立つ式を用い，u を求める式として以下を導出せよ。ここで p_0 は貯気槽内部の全圧，p は先細ノズル出口の静圧とする。

$$u=\sqrt{\frac{2\gamma RT_0}{\gamma-1}\left\{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}}$$



図

材　料　力　学

1．図のように，AB 部の長さ $2l$，直径 d，BC 部の長さ l，直径 $2d$ の段付き丸棒がある。C 点が壁に固定され，A 点，B 点にそれぞれ図の向きに荷重 P，Q が作用するとき，以下の問いに答えよ。ただし，丸棒 AB，BC は同じ材料で出来ており，その縦弾性係数を E とする。

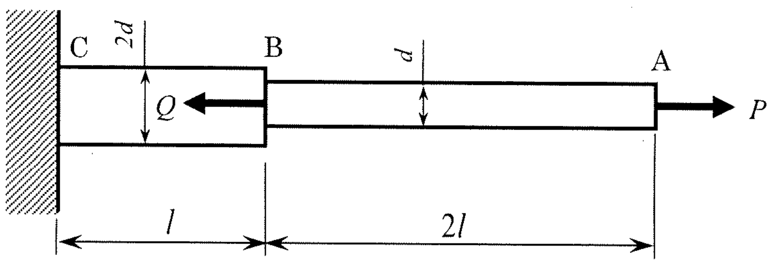
（1）　壁 C の反力を求めよ。ただし，反力が引張りのときを正とする。

（2）　AB 部および BC 部の軸力をそれぞれ P_{AB}，P_{BC} とするとき，P_{AB}，P_{BC} を求めよ。

（3）　AB 部および BC 部の応力をそれぞれ σ_{AB}，σ_{BC} とするとき，σ_{AB}，σ_{BC} を求めよ。

（4）　A 点の変位を求めよ。

（5）　A 点が移動せず元の位置にとどまるとき，Q は P の何倍となるか。



図

2．図１に示すように，水平な天井の支点B, Cを含む各節点がピンで接続されたAB, ACを部材とするトラスがある。節点Aに図の向きに荷重Pが作用するとき，以下の問いに答えよ。ただし，部材AB，ACの断面積，縦弾性係数は等しく，それぞれA，Eとする。なお，部材の変形は微小とし，重力は無視できるものとする。

（１）　部材AB，ACの軸力をそれぞれP_{AB}，P_{AC}とするとき，P_{AB}，P_{AC}を求めよ。

（２）　A点の水平方向変位，および鉛直方向変位を求めよ（答えには，水平方向は左右，鉛直方向は上下のいずれに移動するかも明示すること）。

（３）　図１の状態から，図２のように部材ACのみを剛体へと置き換えた。このとき，A点の水平方向変位，および鉛直方向変位を求めよ（答えには，水平方向は左右，鉛直方向は上下のいずれに移動するかも明示すること）。

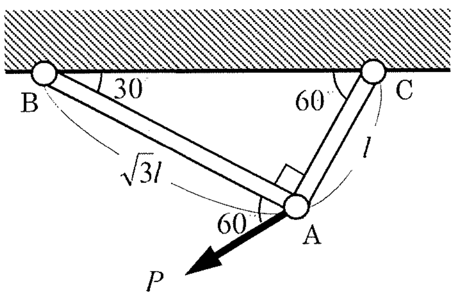


図１

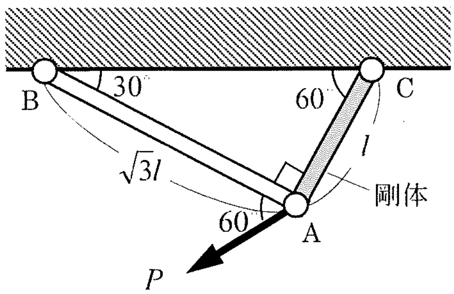


図２

制　御　工　学

1．あるシステムのインパルス応答が次式となった。ただし，t は時間を表す変数であり，$t > 0$ である。以下の問いに答えよ。

$$g(t) = 3e^{-2t}$$

（1）　このシステムの伝達関数を求めよ。

（2）　このシステムの時定数 T を求めよ。

（3）　このシステムのステップ応答 $h(t)$ を求めよ。

２．図１に示すシステムについて，以下の問いに答えよ。なお，sはラプラス変数である。

（１）　図１の制御系が安定となる変数Kの条件を求めよ。

（２）　$K=10$として開ループの周波数伝達関数$G(j\omega)$を求め，$G(j\omega)$のゲインgと位相φを求めよ。ただし，ゲインgは周波数応答法の定義に基づきデシベル表示とすること。

（３）　図１中の $1/(1+s)$ は一次遅れ要素である。図２を解答用紙に転写し，$1/(1+s)$ のボード線図の概形を描け。なお，$10\log_{10}2 \fallingdotseq 3$を用いてよい.

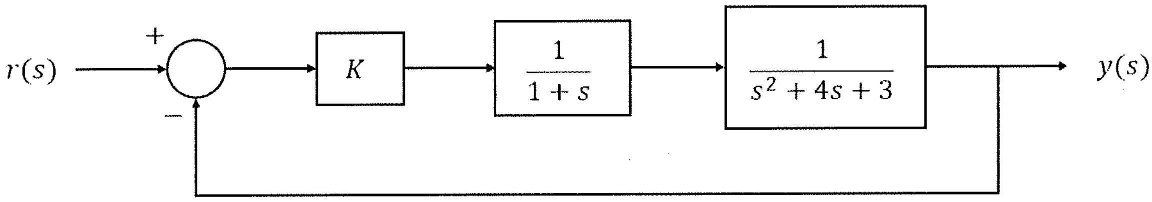


図１

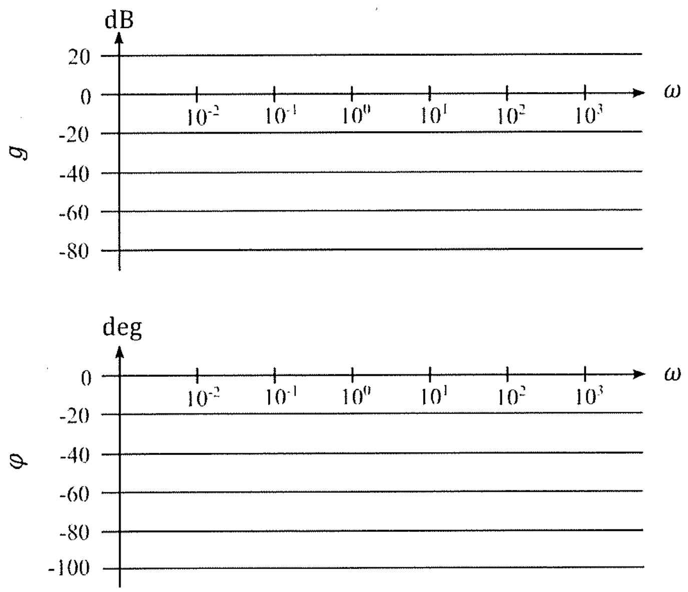


図２

電　気　回　路

１．以下の問いに答えよ。

（１）　真空中で点電荷 Q_1, Q_2 が距離 r だけ離れた位置に置かれている。このとき２つの点電荷の間に働く力 F はいくらか。ただし，真空の誘電率を ε_0 [F/m] とする。

（２）　電圧 V で充電された，静電容量が C のコンデンサと全く充電されていない静電容量が $3C$ のコンデンサがある。これらを並列に接続したとき，これらのコンデンサに蓄えられる全静電エネルギーはいくらか。

２．以下の問いに答えよ。

（１）　図１の回路において，比誘電率が $\varepsilon_1 = 4$，電極面積0.4 m^2，電極間隔4 mm の平行平板コンデンサと，比誘電率が $\varepsilon_2 = 6$，電極面積0.4 m^2，電極間隔4 mm の平行平板コンデンサが並列に接続されている。これらのコンデンサに 10 V の直流電圧を印加したとき，蓄えられる電荷の総量 Q[C]はいくらか。ただし，真空の誘電率を $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m とする。

（２）　図２の LC 交流回路の共振周波数 f_c [Hz]はいくらか。ただし，円周率 $\pi = 3.14$ とする。

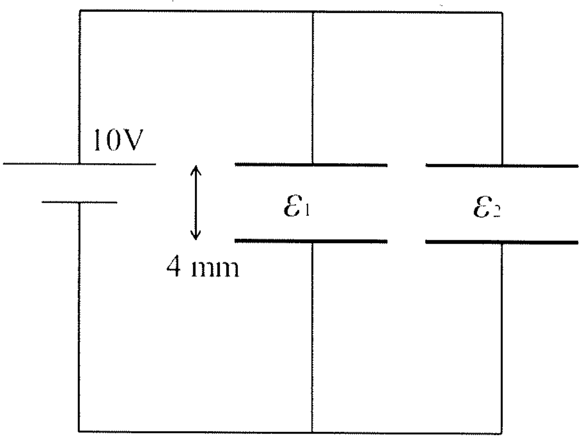


図１

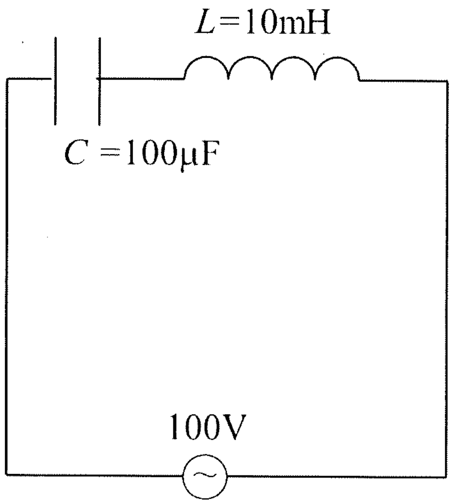


図２

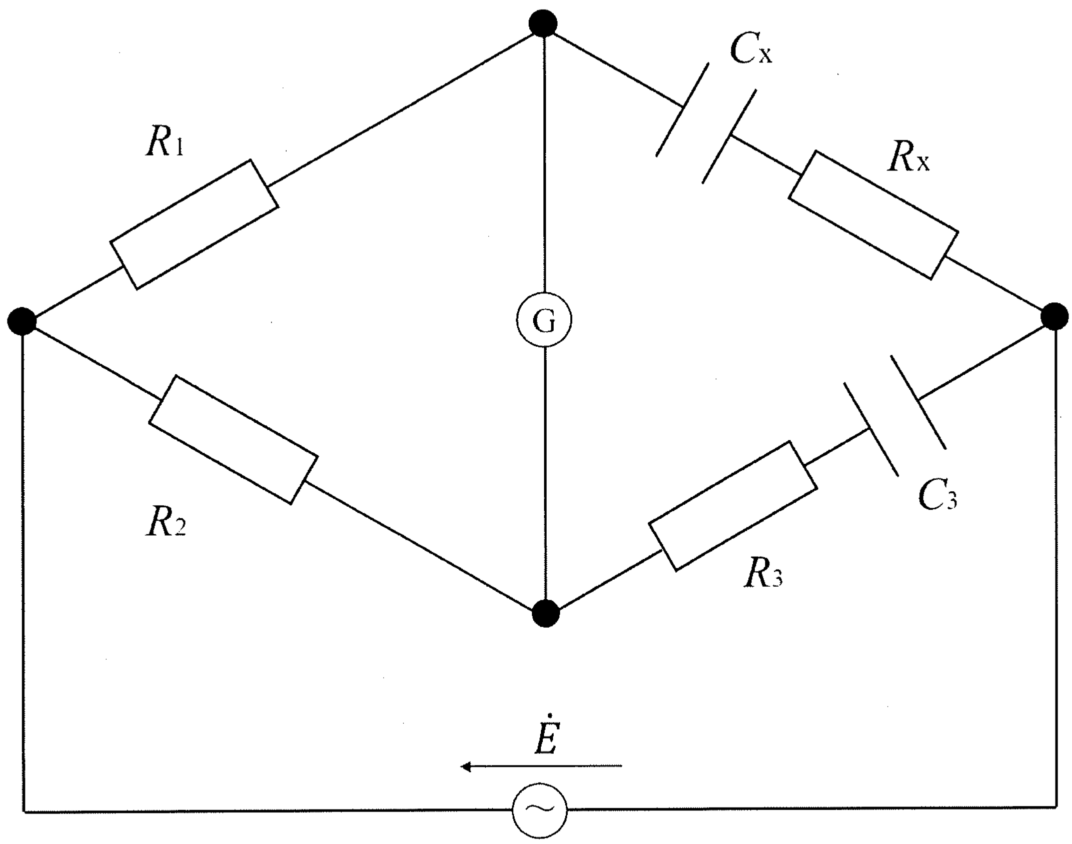
3．図のような交流ブリッジ回路において，交流電源の電圧を$\dot{E}$，その角周波数をωとする。R_1，R_2，R_3は既知の抵抗，C_3は容量が既知のコンデンサであり，R_x，C_xは未知の抵抗およびコンデンサである。交流検流器Gの指示がゼロとなりブリッジが平衡状態にあるとき，以下の問いに答えよ。

（1）　直列につながれた抵抗R_3とコンデンサC_3の合成インピーダンスZ_3を虚数単位jと角周波数ωを用い，複素数表記であらわせ。

（2）　このブリッジの平衡条件をR_1，R_2，R_3，R_x，C_3，C_xおよび虚数単位jと角周波数ωを用いてあらわせ。

（3）　（2）の平衡条件式において左辺右辺の実部が等しいことから，R_xをR_1，R_2，R_3を用いてあらわせ。

（4）　（2）の平衡条件式において左辺右辺の虚部が等しいことから，C_xをR_1，R_2，C_3を用いてあらわせ。



図

科目	小問	出題意図
例 流体力学	1	圧縮性流体一次元等エントロピー流れの理解力をみる.
数学	1	極座標における多重積分の応用力をみる意図がある.
	2	線形代数において, 行列式の計算能力をみる意図がある.
	3	複素積分における留数定理の活用を見る意図がある.
	4	ベクトル解析における空間曲線のけいさんのをみる
	5	フーリエ級数の計算能力をみる
	6	逆ラプラス変換の計算能力をみる
工業力学	1	大学学部の「工業力学」における重要な学修テーマの一つに「剛体の回転運動」がある。そこでは, 物体の重心がどこにあるかを理解することと, 所与の回転軸まわりに外力モーメントの大きさを評価できることが肝要である。そこで, 各小問においてこれらを問うている。 (1)簡単な幾何形状の組み合わせからなる物体について, 重心位置を求めることができるかどうかを見ている。 (2)所与の外力によって所与の回転軸まわりに生ずるモーメントの大きさを評価できるかどうかを見ている。
	2	大学学部の「工業力学」における重要な学修テーマとして「質点の並進運動」,「剛体の回転運動」, および「調和振動」がある。そこで, バネ力と重力による並進運動と回転調和振動を組み合わせて解く問題設定としている。 (1)並進運動と回転運動を同時に伴う物体について, 並進変位と回転変位の関係を立式できるかどうかを見ている。 (2)並進の運動方程式を立式できるかどうかを見ている。 (3)回転の運動方程式を立式できるかどうかを見ている。 (4)並進の運動方程式を立式できるかどうかを見ている。 (5)力およびモーメントの釣り合い条件において運動方程式を解くことができるかどうかを見ている。 (6)回転調和振動の運動方程式を立式できるかどうかを見ている。 (7)回転調和振動の運動方程式から固有振動数を求めることができるかどうかを見ている。
工業熱力学	1	比熱, 仕事, 熱機関に関する基礎知識を確認する.
	2	状態方程式, エンタルピや内部エネルギー, および理想気体と実在気体の違いに関する理解力を確認する.
	3	理想気体におけるガスタービンサイクルに関する理解力を確認する.
流体力学	1	質量保存式, ベルヌーイの式, 静水圧の式に関しての理解力を確認する.
	2	圧縮性流体のエネルギ保存式, 理想気体に関する基礎知識を確認する.

科目	小問	出題意図
材料力学	1	軸力を受ける段付き丸棒の内力，応力，変形量を求めさせることにより，基礎的な静定問題の理解力を確認する。
	2	骨組み構造（トラス構造）の軸力，節点変位の求め方についての基本的理解力を問う。
制御工学	1	システムの伝達関数に対する入力と応答についての基礎的知識を確認する。
	2	制御系の安定性，周波数伝達関数，ボード線図の理解力をみる.
電気回路	1	これまでの過去問と同様，静電荷に関して一定レベルの基礎知識を問うことを目的として出題した.
	2	これまでの過去問を踏まえ，コンデンサ，コイルなどの理解について問うことを目的として出題した.
	3	航空宇宙分野では歪ゲージを用いた構造部材強度の計測や，歪圧力計を用いたエンジン燃焼室圧力計測などにおいて頻繁にブリッジ回路が用いられる. この基本原理についての理解を問うことを目的として出題した.

数学解答

問題１

$x = ar\sin\theta\cos\phi$, $y = b\,r\sin\theta\sin\phi$, $z = cr\cos\theta$とおく．

積分範囲は $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$, 最初にヤコビアンを求める．

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\phi & ar\cos\theta\cos\phi & -ar\sin\theta\sin\phi \\ b\sin\theta\sin\phi & br\cos\theta\sin\phi & br\sin\theta\cos\phi \\ c\cos\theta & -cr\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= abcr^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + abcr^2\sin^3\theta\sin^2\phi + abcr^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + abcr^2\sin^3\theta\cos^2\phi$$

$$= abcr^2\sin\theta\cos^2\phi\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + abcr^2\sin\theta\sin^2\phi\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$= abcr^2\sin\theta\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right)$$

$$= abcr^2\sin\theta$$

$$I = \iiint_D dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} abc\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= abc\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^1 r^2 dr$$

$$= \frac{2\pi abc}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4\pi abc}{3}$$

問題２

行列Ａは余因子展開で行列式を計算する．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= -1+4+4-1+4-4 \qquad +1+1$$

$$= 8$$

Ｂの行列の４行の-1倍を５行に加算．その後３行の-1倍を４行に加算する．これを繰り返す．

$$\det(\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&2&2&2\\1&2&3&3&3\\1&2&3&4&4\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&2&2&2\\1&2&3&3&3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&2&2&2\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

上三角行列になったので、その対角成分の積が行列式になる.

問題３

複素積分の経路を複素平面上の無限遠方の上円弧経路 C_R と実軸[-∞,∞]を通る閉区間 R に分割する.

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$$

$$I_z=\int_C\frac{dz}{z^4+1}=\int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}+\int_R\frac{dz}{z^4+1}$$

（１）被積分関数の特異点を探す. $z^4+1=0$ の解が特異点となる.

$$\alpha=e^{i\frac{\pi}{4}},\quad \beta=e^{i\frac{3\pi}{4}},\quad \gamma=e^{i\frac{5\pi}{4}},\quad \delta=e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

（２）経路 C の内部に含まれるのは, αとβ. これらは 1 位の極であることから, 留数を求める. この時ロピタルの定理を使う.

$$\mathrm{Re}\,s(f,\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\frac{z-\alpha}{z^4+1}=\lim_{z\to\alpha}\frac{1}{4z^3}$$
$$=\frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$
$$=-\frac{i+1}{4\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Re}\,s(f,\beta)=\lim_{z\to\beta}\frac{z-\beta}{z^4+1}=\lim_{z\to\beta}\frac{1}{4z^3}=\frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}}$$
$$=\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$=-\frac{i-1}{4\sqrt{2}}$$

（３）複素積分を実行する.

$$\int_C\frac{dz}{z^4+1}=2\pi i\left(\mathrm{Re}\,s(f,\alpha)+\mathrm{Re}\,s(f,\beta)\right)$$
$$=2\pi i\left(-\frac{i+1}{4\sqrt{2}}-\frac{i-1}{4\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

経路 C_Rに関する複素積分は 0 になるので

$$I_z=\int_C\frac{dz}{z^4+1}$$
$$=\int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}+\int_R\frac{dz}{z^4+1}$$

$$\int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}=0$$

$$I_z=\int_R\frac{dz}{z^4+1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

問題4

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} - a\sin t\,\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}'(t) = -a\sin t\,\boldsymbol{i} + a\cos t\,\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$$
$$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$s = \int_0^T |\boldsymbol{r}'|\,dt = \int_0^T \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,T$$

問題5

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$f(x)$は偶関数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{1}{n}\sin nx - \left(\frac{1}{n^2}\right)\cos nx\right]$$
$$= \frac{2\{(-1)^n - 1\}}{n^2\pi}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$$
$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\{(-1)^n - 1\}}{n^2\pi}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

問題6

$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$$
$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+\omega^2}$$

より

$$1 = A(s^2+\omega^2) + (Bs+C)s$$

係数比較から

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\omega^2},\quad \mathrm{B} = -\frac{1}{\omega^2},\quad \mathrm{C} = 0$$

したがって，

$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right)$$

ここで

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} = \cos(\omega t)$$

よって

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right\} = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos(\omega t)) = \frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}$$

工業力学　解答例

1．

（1）穴の部分は，負の面積の物体が重なっているものとして扱う。円板の面積は$4\pi a^2$，重心は$(0, 0)$，三角形の面積は$\frac{a^2}{2}$，重心の座標は$\left(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$ であるから，面密度を ρ として，

$$x_{\mathrm{CG}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \rho S_i x_i}{\sum \rho S_i} = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i} = \frac{4\pi a^2 \cdot 0 + \left(-\frac{a^2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)}{4\pi a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{\frac{a^3}{6}}{(8\pi - 1)\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{3(8\pi - 1)}$$

対称性より $y_{\mathrm{CG}} = x_{\mathrm{CG}} = \frac{a}{3(8\pi-1)}$

（2）外力ベクトルは$\vec{F} = (0, 0, F)$。$\overrightarrow{BA} = (a, -b, 0)$。よってこの外力が点 B まわりに作るモーメント$\overrightarrow{M_{\mathrm{B}}}$は，

$$\overrightarrow{M_{\mathrm{B}}} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & -b & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} = \vec{i}(-b \cdot F - 0 \cdot 0) + \vec{j}(0 \cdot 0 - a \cdot F) + \vec{k}(a \cdot 0 - (-b) \cdot 0)$$

$$= -bF\vec{i} - aF\vec{j} = (-bF, -aF, 0)$$

次に，$\overrightarrow{BC} = (0, -b, c)$。モーメント$\overrightarrow{M_{\mathrm{B}}}$の BC 方向成分 M_{BC}は，

$$M_{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{M_{\mathrm{B}}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = (-bF, -aF, 0) \cdot \frac{(0, -b, c)}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{abF}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

よって　　　$|M_{\mathrm{BC}}| = \frac{abF}{\sqrt{b^2+c^2}}$

2．

（1）円柱がθ回転すると$R\theta$だけ並進するので，$x_1 = R\theta$ $\boxed{答}\cdots$①

円柱が距離$R\theta$並進すると紐が$R\theta$だけ繰り出されるので，$x_2 = 2R\theta$ $\boxed{答}\cdots$②

（2）$M\ddot{x}_1 = T - F - kx_1$ $\therefore M\ddot{x}_1 = T - F - kR\theta$ $\boxed{答}\cdots$③

（3）$I\ddot{\theta} = TR + FR$ $\boxed{答}\cdots$④

（4）$m\ddot{x}_2 = mg - T$ $\boxed{答}\cdots$⑤

（5）釣り合い状態では加速度や角加速度はゼロであるから，③④⑤より$T - F - kR\theta_0 = 0$, $T + F = 0$, $T = mg$. よって，

$$\theta_0 = \frac{2mg}{kR}\ \boxed{答}\cdots ⑥$$

（6）①～⑤よりx_1, x_2, T, Fを消去すると，

$$\left(M + 4m + \frac{I}{R^2}\right)R\ddot{\theta} + kR\theta = 2mg \cdots ⑦$$

⑥より$\theta = \theta' + \theta_0 = \theta' + 2mg/kR$を⑦に代入すると，

$$\left(M + 4m + \frac{I}{R^2}\right)R\ddot{\theta}' + kR\theta' = 0\ \boxed{答}\cdots ⑧$$

（7）⑧より固有角振動数は，

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + 4m + \frac{I}{R^2}}}\ \boxed{答}$$

工業熱力学　解答例

解

1．

（1）物体A，Bのそれぞれの質量をMとすると，

MC_A（40 - 20）＝MC_B（80 - 40）

$20C_A$＝$40C_B$，よって，$C_A／C_B = 2$

（2）経路A，経路Bを通って状態1→2→1と1サイクル作動した時に，系が外界から与えられた熱量は，ΔQ＝250 - 100＝150 J である．よって，系が外界へなすトータルの仕事も150 Jである。経路Aで外界へなした仕事は200 Jなので，経路Bで系が外界へなした仕事はW＝150－200＝ -50 J。すなわち，50 Jの仕事を外界から受けた。

（3）単位時間あたりの出力をL，熱効率をηとすると，熱効率の定義より，

$Q_H = L／\eta =（Q_H - Q_L）／\eta = 2.0\times10^9$W／0.40＝5.0 GW（500万kW）

熱力学の第1法則より $Q_L = Q_H - L$＝5.0－2.0＝3.0 GW（300万kW）

2．

（1）状態方程式より　$pv = RT$　であり，エンタルピに関する式 $h = u + pv$　から

$h = u + RT$　となる．

題意より $u = u(T)$ とみなせるから，

$h = u(T) + RT$　となり，温度だけの関数である．

（2）$dh = du + RdT$ を $c_p = dh／dT$　に代入すると，

$c_p = c_v + R$ が得られる．これに　$\kappa = C_p / C_v$ を代入すれば，

$C_v = R / (\kappa - 1)$，　$C_p = \kappa \cdot R / (\kappa - 1)$

となる．

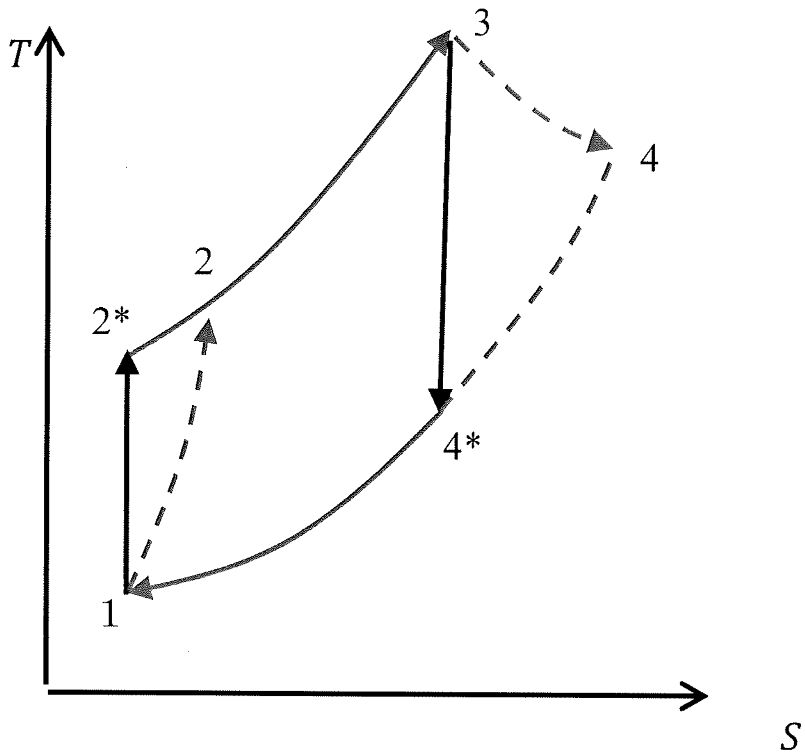
（3）2原子気体や多原子気体が高温になると，分子間の振動エネルギーが生じるため。

3．

（1） $Q_1 = mc_p(T_3 - T_{2*})$ ． $Q_2 = mc_p(T_{4*} - T_1)$ ．

（2） $\eta_{th} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{mc_p(T_3 - T_{2*}) - mc_p(T_{4*} - T_1)}{mc_p(T_3 - T_{2*})} = 1 - \frac{T_{4*} - T_1}{T_3 - T_{2*}}$ ．

（3）



（4） $\eta_c = \frac{mc_v(T_{2*} - T_1)}{mc_v(T_2 - T_1)} = \frac{T_{2*} - T_1}{T_2 - T_1}$ ．

（5） $\eta_t = \frac{mc_v(T_3 - T_{4*})}{mc_v(T_3 - T_4)} = \frac{T_3 - T_{4*}}{T_3 - T_4}$ ．

以上。

流体力学　解答例

１．

（１）図より質量保存の式は

$$\rho A_1 u_1 = \rho A_2 u_2$$

となる。

（２）図よりベルヌーイの式は

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2$$

となる。

（３）図より p_1 は

$$p_1 = p_a + \rho g h_1$$

となる。

（４）

$Q = A_1 u_1 = A_2 u_2$ より，$u_1 = \dfrac{Q}{A_1}$，$u_2 = \dfrac{Q}{A_2}$ が得られる。

ベルヌーイの定理より

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho u_1^2 u_2^2 - \frac{1}{2}\rho u_1^2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{Q}{A_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{Q}{A_1}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho Q^2\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)$$

さらに $p_1 = p_a + \rho g h_1$ および $p_2 = p_a + \rho g h_2$　であるから，

$$h_1 - h_2 = \frac{1}{\rho g}(p_1 - p_2) = \frac{1}{\rho g}\frac{1}{2}\rho Q^2\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right) = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)$$

問題文で $A_1 > A_2$ が与えられているので，

$$|h_1 - h_2| = h_1 - h_2 = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)$$

２.

（１）

貯気槽内部と排出口の間で成り立つエネルギー保存式は，貯気槽内部の流速を０と見なすことができ，かつ$h = C_p T$より

$$C_p T_0 + \frac{1}{2}0^2 = C_p T_0 = C_p T + \frac{1}{2}u^2$$

（２）

理想気体において$C_p = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}R$が成り立つため，（１）で得られた式に代入して

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}RT_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1}RT + \frac{1}{2}u^2$$

が得られる。

（３）

等エントロピ過程で成り立つ式として$\dfrac{T_0}{p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \dfrac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$。

（２）で得られた式を用いて，

$$u = \sqrt{\frac{2\gamma R T_0}{\gamma-1}\left(1 - \frac{T}{T_0}\right)} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_0}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

材料力学 解答例

1．

（1）壁Cの反力は，$P-Q$ …① $\boxed{\text{答}}$

（2）$P_{\mathrm{AB}}=P$ …② $\boxed{\text{答}}$

$P_{\mathrm{BC}}=P-Q$ …③ $\boxed{\text{答}}$

（3）$\sigma_{\mathrm{AB}}=\dfrac{P_{\mathrm{AB}}}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\dfrac{4P_{\mathrm{AB}}}{\pi d^2}=\dfrac{4P}{\pi d^2}$ …④ $\boxed{\text{答}}$

$\sigma_{\mathrm{BC}}=\dfrac{P_{\mathrm{BC}}}{\pi\left(\frac{2d}{2}\right)^2}=\dfrac{P_{\mathrm{BC}}}{\pi d^2}=\dfrac{P-Q}{\pi d^2}$ …⑤ $\boxed{\text{答}}$

（4）AB，BC部の伸びをそれぞれλ_{AB}，λ_{BC}とすると，

$$\lambda_{AB}=\frac{P_{AB}\cdot 2l}{E\cdot\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\frac{8Pl}{\pi Ed^2}\quad\text{…⑥},\qquad \lambda_{BC}=\frac{P_{BC}l}{E\cdot\pi\left(\frac{2d}{2}\right)^2}=\frac{(P-Q)l}{\pi Ed^2}\quad\text{…⑤}$$

A点の変位をδ_{A}とすると，

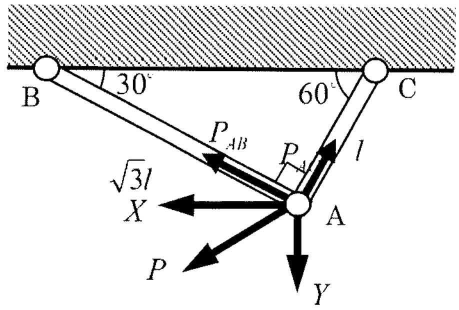
$$\delta_{\mathrm{A}}=\lambda_{\mathrm{AB}}+\lambda_{\mathrm{BC}}=\frac{8Pl}{\pi Ed^2}+\frac{(P-Q)l}{\pi Ed^2}=\frac{(9P-Q)l}{\pi Ed^2}\quad\text{…⑦}\boxed{\text{答}}$$

（5）A点が移動しないので$\delta_{\mathrm{A}}=0$，⑦式より，$9P-Q=0\Leftrightarrow Q=9P$，よって，$Q$は$P$の9倍$\boxed{\text{答}}$

２．（１）部材 AB，AC の軸力をそれぞれ P_{AB}， P_{AC} とする。A 節点における力のつり合いより，

$$\sum X = 0 : P_{AC}\cos 60^\circ - P_{AB}\cos 30^\circ - P\cos 30^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}P_{AC} - \frac{\sqrt{3}}{2}P_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}P \quad \cdots ①$$

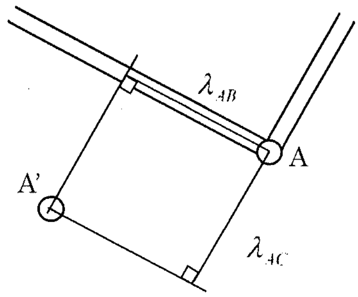


$$\sum Y = 0 : P_{AC}\sin 60^\circ + P_{AB}\sin 30^\circ - P\sin 30^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}P_{AC} + \frac{1}{2}P_{AB} = \frac{1}{2}P \cdots ②$$

①，②より， $P_{AB} = -\frac{1}{2}P$， $P_{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}P$ $\cdots\boxed{答}$

（２）部材 AB，AC の伸びをそれぞれ λ_{AB}， λ_{AC} とすると，



$$\lambda_{AB} = \frac{P_{AB}\cdot\sqrt{3}l}{EA} = -\frac{\sqrt{3}Pl}{2EA}, \qquad \lambda_{AC} = \frac{P_{AC}l}{EA} = \frac{\sqrt{3}Pl}{2EA}$$

微小変位理論より右図のように A 点は A'点に移動する。

幾何学的条件より，A 点の水平方向変位 δ_H， 垂直方向変位 δ_V は

$$\delta_H = \frac{1}{2}\lambda_{AC} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\lambda_{AB}\right| = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{Pl}{EA} + \frac{3}{4}\cdot\frac{Pl}{EA} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{Pl}{EA} \quad （左向き）\cdots\boxed{答}$$

$$\delta_V = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_{AC} - \frac{1}{2}\left|\lambda_{AB}\right| = \frac{3}{4}\cdot\frac{Pl}{EA} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{Pl}{EA} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{Pl}{EA} \quad （下向き）\cdots\boxed{答}$$

(別解) カスティリアノの定理を利用する

A 点に仮想荷重 X， Y を水平左向き，垂直下向きに加える。A 節点における力のつり合いより，

$$\sum X = 0 : P_{AC}\cos 60^\circ - P_{AB}\cos 30^\circ - P\cos 30^\circ - X = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}P_{AC} - \frac{\sqrt{3}}{2}P_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}P + X \cdots ③$$

$$\sum Y = 0 : P_{AC}\sin 60^\circ + P_{AB}\sin 30^\circ - P\sin 30^\circ - Y = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}P_{AC} + \frac{1}{2}P_{AB} = \frac{1}{2}P + Y \cdots ④$$

③，④より， $P_{AB} = -\frac{1}{2}P - \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y$， $P_{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}P + \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y$

トラス全体のひずみエネルギー U は，

$$U = \frac{P_{AB}^2\cdot\sqrt{3}l}{2EA} + \frac{P_{AC}^2 l}{2EA} = \frac{\sqrt{3}l}{2EA}\cdot\left(-\frac{1}{2}P - \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)^2 + \frac{l}{2EA}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}P + \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)^2$$

カスティリアノの定理より，

$$\delta_H=\left.\frac{\partial U}{\partial X}\right|_{X,Y\to 0}=\frac{\sqrt{3}l}{EA}\cdot\left(-\frac{1}{2}P-\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{l}{EA}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}P+\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{X,Y\to 0}$$

$$=\frac{\sqrt{3}l}{EA}\cdot\left(-\frac{1}{2}P\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{l}{EA}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}P\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{Pl}{EA}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{Pl}{EA}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{Pl}{EA}$$ （左向き）…

答

$$\delta_V=\left.\frac{\partial U}{\partial Y}\right|_{X,Y\to 0}=\frac{\sqrt{3}l}{EA}\cdot\left(-\frac{1}{2}P-\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{l}{EA}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}P+\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Bigg|_{X,Y\to 0}$$

$$=\frac{\sqrt{3}l}{EA}\cdot\left(-\frac{1}{2}P\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{l}{EA}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}P\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{Pl}{EA}+\frac{3}{4}\cdot\frac{Pl}{EA}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{Pl}{EA}$$ （下向き）…

答

（３）部材 AB，AC の軸力をそれぞれ P_{AB}，P_{AC} とすると，

（１）と同様にして，$P_{AB}=-\frac{1}{2}P$，$P_{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}P$

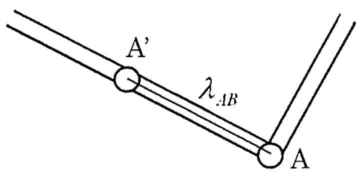
部材 AB，AC の伸びをそれぞれ λ_{AB}，λ_{AC} とすると，

$$\lambda_{AB}=\frac{P_{AB}\cdot\sqrt{3}l}{EA}=-\frac{\sqrt{3}Pl}{2EA},\qquad \lambda_{AC}=0$$ （∵AC は剛体なので）

幾何学的条件より，A 点の水平方向変位 δ_H，垂直方向変位 δ_V は

$$\delta_H=\frac{\sqrt{3}}{2}|\lambda_{AB}|=\frac{3}{4}\cdot\frac{Pl}{EA}$$ （左向き）…答

$$\delta_V=\frac{1}{2}|\lambda_{AB}|=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{Pl}{EA}$$ （上向き）…答



(別解) カスティリアノの定理を利用する

(1)と同様に，A 点に仮想荷重 X，Y を加え，A 節点における力のつり合いより，

$$P_{AB}=-\frac{1}{2}P-\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y,\quad P_{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}P+\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y$$

トラス全体のひずみエネルギー U は，

$$U=\frac{P_{AB}^2\cdot\sqrt{3}l}{2EA}=\frac{\sqrt{3}l}{2EA}\cdot\left(-\frac{1}{2}P-\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)^2$$

カスティリアノの定理より，

$$\delta_H=\left.\frac{\partial U}{\partial X}\right|_{X,Y\to 0}=\frac{\sqrt{3}l}{EA}\cdot\left(-\frac{1}{2}P-\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)\cdot\left.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|_{X,Y\to 0}=\frac{\sqrt{3}l}{EA}\cdot\left(-\frac{1}{2}P\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{Pl}{EA}$$

（左向き）…$\boxed{\text{答}}$

$$\delta_V=\left.\frac{\partial U}{\partial Y}\right|_{X,Y\to 0}=\frac{\sqrt{3}l}{EA}\cdot\left(-\frac{1}{2}P-\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)\cdot\left.\left(\frac{1}{2}\right)\right|_{X,Y\to 0}$$

$=\frac{\sqrt{3}l}{EA}\cdot\left(-\frac{1}{2}P\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{Pl}{EA}$，よって，$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{Pl}{EA}$（上向き）…$\boxed{\text{答}}$

制御工学　解答例

1.

（1）　インパルス応答のラプラス変換がシステムの伝達関数を表すので,

$$G(s) = \mathcal{L}[3e^{-2t}]$$
$$= \frac{3}{s+2}$$

（2）　$G(s)$ の分子分母を2で割って

$$G(s) = \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{s}{2}}$$

であるので，時定数 $T = \frac{1}{2}$ である。

（3）単位ステップ関数のラプラス変換は $\frac{1}{s}$ であるから，ステップ応答は

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s(s+2)}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)\right]$$
$$= \frac{3}{2}(1 - e^{-2t})$$

2．

（1）$r(s)$から$y(s)$への伝達関数は

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^3+5s^2+7s+3+K}$$

特性方程式からラウス表をつくると，

$$\begin{array}{cc} 1 & 7 \\ 5 & 3+K \\ \frac{32-K}{5} & 0 \\ 3+K & \end{array}$$

安定となるためにはラウス表の第1列がすべて正となる必要がある．

$$\text{第3行目}\quad \frac{32-K}{5} > 0 \quad \text{より} \quad K < 32$$

$$\text{第4行目}\quad 3+K > 0 \quad \text{より} \quad K > -3$$

したがって，Kの条件は，

$$-3 < K < 32$$

（2）$K=10$としたときの開ループ伝達関数は

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)(s^2+4s+3)}$$

$s=j\omega$とし，周波数伝達関数$G(j\omega)$からゲインgと位相φを求める．

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)^2(s+3)}$$

$$G(j\omega) = \frac{10}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}$$

ゲインgは

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{|(j\omega+1)^2(j\omega+3)|}$$
$$= \frac{10}{(\omega^2+1)\sqrt{(\omega^2+9)}}$$

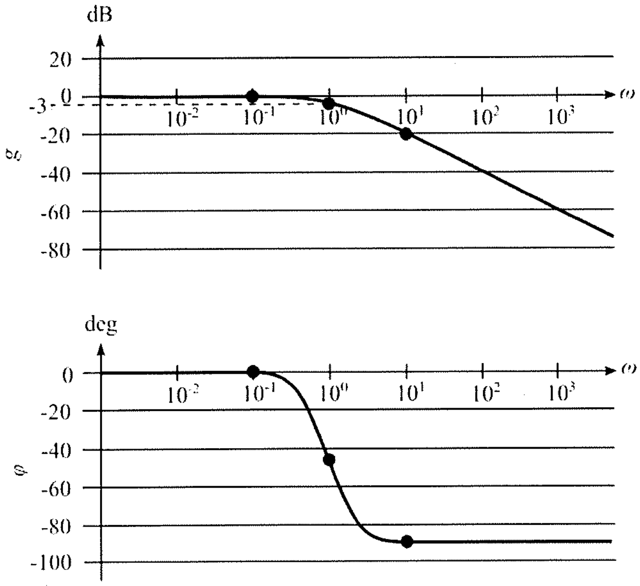
$$\begin{aligned} g &= 20\log_{10}|G(j\omega)| \\ &= 20\log_{10}\left(\frac{10}{(\omega^2+1)\sqrt{(\omega^2+9)}}\right) \\ &= 20 - 20\log_{10}(\omega^2+1) - 10\log_{10}(\omega^2+9) \qquad [\mathrm{dB}] \end{aligned}$$

位相φは

$$G(j\omega) = \frac{10}{(1 + j\omega)(-\omega^2 + j4\omega + 3)}$$
$$= 10\frac{(3 - 5\omega^2) - j(7\omega - \omega^3)}{(3 - 5\omega^2)^2 + (7\omega - \omega^3)^2}$$

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{Im[G(j\omega)]}{Re[G(j\omega)]}\right)$$
$$\varphi = -tan^{-1}\left(\frac{7\omega - \omega^3}{3 - 5\omega^2}\right) \qquad \text{[rad]}$$

（３）$1/(1 + s)$のボード線図は以下となる.



一次遅れ要素の周波数伝達関数は以下となる. Tは時定数である.

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

ゲイン$g(j\omega)$は,

$$g(j\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)| \text{ [dB]}$$
$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \omega^2T^2}{(1 + \omega^2T^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2T^2}}$$

$T=1$より，

$$g(j\omega)=20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\right)=-10\log_{10}(1+\omega^2)\ [\mathrm{dB}]$$

一次遅れ要素の位相$\varphi(j\omega)$は

$$\varphi(j\omega)=-tan^{-1}(\omega T)$$

$T=1$より，

$$\varphi(j\omega)=-tan^{-1}(\omega)\ [\mathrm{rad}]$$

- $\omega=0.1$

  $\omega\ll1$より，
  $$g(j\omega)\approx-10\log_{10}(1)=0\ [\mathrm{dB}]$$
  $$\varphi(j\omega)=-tan^{-1}(0.1)\approx0\ [\mathrm{deg}]$$

- $\omega=1$

  $\omega=1$より，
  $$g(j\omega)=-10\log_{10}(2)=-3\ [\mathrm{dB}]$$
  $$\varphi(j\omega)=-tan^{-1}(1)=-45\ [\mathrm{deg}]$$

- $\omega=10$

  $\omega\gg1$より，
  $$g(j\omega)\approx-10\log_{10}(100)=-20\ [\mathrm{dB}]$$
  $$\varphi(j\omega)=-tan^{-1}(10)\approx-90\ [\mathrm{deg}]$$

電気回路　解答例

1．

（1）　真空中で点電荷 Q_1, Q_2 が距離 r だけ離れた位置に置かれている。このとき2つの点電荷の間に働く力 F はいくらか。ただし，真空の誘電率を ε_0 [F/m] とする。

解答

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

（2）　電圧 V で充電された，静電容量が C のコンデンサと全く充電されていない静電容量が $2C$ のコンデンサがある。これらを並列に接続したとき，これらのコンデンサに蓄えられる全静電エネルギーはいくらか。

解答

電圧 V で充電されたコンデンサに蓄えられた電荷 Q=CV.

充電されていない側のコンデンサと並列に接続した後は，この電荷 Q が２つのコンデンサに分配される．接続後のコンデンサの電圧 V’ は Q=CV=(C+3C)V’ より

$$V' = \frac{1}{4}V$$

となる．

コンデンサの静電エネルギーE は

$$E = \frac{1}{2}CV^2$$

であるから，２つのコンデンサの全静電エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}(C + 3C)\left(\frac{1}{4}V\right)^2 = \frac{1}{8}CV^2$$

2．

（1） 図1の回路において，比誘電率が$\varepsilon_1 = 4$，電極面積0.4 m^2，電極間隔4 mm の平行平板コンデンサと，比誘電率が$\varepsilon_2 = 6$，電極面積0.4m^2，電極間隔4 mm の平行平板コンデンサが並列に接続されている。これらのコンデンサに 10V の直流電圧を印加したとき，蓄えられる電荷の総量 Q[C]はいくらか。ただし，真空の誘電率をε_0 =8.85×10^{-12} F/m とする。

（1）

コンデンサの容量は

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 S}{d}$$

(但しε_rは比誘電率)で与えられる．また，並列接続された2つのコンデンサ C1，C2 の合成容量 C は C1+C2 なので

$$C = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_0 S}{d} = \frac{10 * 0.4}{0.004}\varepsilon_0 = 1000\varepsilon_0 = 8.85 * 10^{-9}\ [\mathrm{F/m}]$$

コンデンサに蓄えられる電荷は Q=CV なので,

$$Q = 10 * 8.85 * 10^{-9} = 8.85 * 10^{-8}\ [C]$$

＊なお，問題中に与えられた数値より，有効数字は1桁でも正解とする．

（2）図2の LC 交流回路の共振周波数 f_c [Hz]はいくらか。ただし，円周率π = 3.14 とする。

LC 回路の共振周波数は

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6.28}\frac{1}{10^{-3}} = 0.1592 * 10^3 = 1.59 * 10^2 [\mathrm{Hz}]$$

＊なお，問題中に与えられた数値より，有効数字は2桁でも正解とする．

3．図のような交流ブリッジ回路において，交流電源の電圧を$\dot{E}$，その角周波数をωとする。R_1，R_2，R_3は既知の抵抗，C_3は容量が既知のコンデンサであり，R_x，C_xは未知の抵抗およびコンデンサである。交流検流器 G の指示がゼロとなりブリッジが平衡状態にあるとき，以下の問いに答えよ。

（1）　直列につながれた抵抗 R_3とコンデンサ C_3の合成インピーダンス Z_3を虚数単位jと角周波数ωを用い，複素数表記であらわせ。

$$Z_3 = \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\right)$$

（2）　このブリッジの平衡条件を R_1，R_2，R_3，R_x，C_3，C_xおよび虚数単位jと角周波数ωを用いてあらわせ。

$$R_1\left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\right) = R_2\left(R_x + \frac{1}{j\omega C_x}\right)$$

（3）　（2）の平衡条件式において左辺右辺の実部が等しいことから，Rx を R1，R2，R3 を用いてあらわせ。

展開すると

$$R_1R_3 - j\frac{R_1}{\omega C_3} = R_2R_x - j\frac{R_2}{\omega C_x}$$

この実部が等しいので

$$\frac{R_1R_3}{R_2} = R_x$$

（4）　（2）の平衡条件式において左辺右辺の虚部が等しいことから，C_xを R_1，R_2，C_3を用いてあらわせ。

$$j\frac{R_1}{\omega C_3} = j\frac{R_2}{\omega C_x}$$

なので

$$C_x = C_3\frac{R_2}{R_1}$$