

2026年度4月入学試験<2026-1>

室蘭工業大学大学院工学研究科

博士前期課程 生産システム工学系専攻

航空宇宙総合工学コース

一般入学試験問題

数 学

13:00～15:00

注意事項：

大問1～6のうち5問を選択して答えよ

問題用紙・草稿用紙・答案用紙は全て回収する。

試験後に持ち帰らないこと。

受験番号	
------	--

数 学

問1から6のうち、5問を選択して答えよ。

1. 次の定積分について以下の問いに答えよ。

$$I = \iiint_D (x-y)^2 dx dy dz$$

- (1) 領域 D が $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$ の場合の定積分 I を求めよ。
- (2) 領域 D が $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ の場合の定積分 I を求めよ。

2. 次の行列 A について以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値を求めよ。
- (2) 行列 A の固有値のうち、最大の固有値について固有ベクトルを求めよ。

3. 次の複素積分

- (1) 複素積分 $I = \int_C \frac{dz}{z-a}$ を求めよ。但し C は a を中心とする半径 r の円とする。
- (2) 複素積分 $I = \int_C \frac{2z}{z^2+1} dz$ を求めよ。但し、 C は $|z|=3$ の円とする。

4. ベクトル場 $F(x, y, z) = x^2yi - 2xzj + 2yzk$ の $\operatorname{div} F$, $\operatorname{rot} F$ を求めよ。

5. 周期 2π をもつ次の関数をフーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pi \end{cases}$$

6. 次の関数のラプラス逆変換を求めよ。

$$\frac{2s + 3}{s^2 - 3s + 2}$$

2026年度4月入学試験<2026-1>

室蘭工業大学大学院工学研究科

博士前期課程 生産システム工学系専攻

航空宇宙総合工学コース

一般入学試験問題

専門科目

9:00～11:30

注意事項：

大問1問につき答案用紙1枚で解答すること。

問題用紙・草稿用紙・答案用紙は全て回収する。

試験後に持ち帰らないこと。

工業力学，工業熱力学，流体力学，制御工学，電気回路の6科目から2科目を選択。選択した科目名の左欄に○印を記入してください。○印の数は2個までです。

	工業力学		工業熱力学		流体力学		材料力学
	制御工学		電気回路				

受験番号

工業力学

1. 以下の問いに答えよ。ただし、計算過程を記載すること。

(1) 図1のとおり、材質および厚さの一樣な円板に三角形の穴が空いている。この物体の重心の座標を求めよ。

(2) 図2のとおり、大きさ F の $+x$ 方向の外力が点 B にはたらいている。この外力によって線分 AC のまわりに生ずるモーメントの大きさを求めよ。

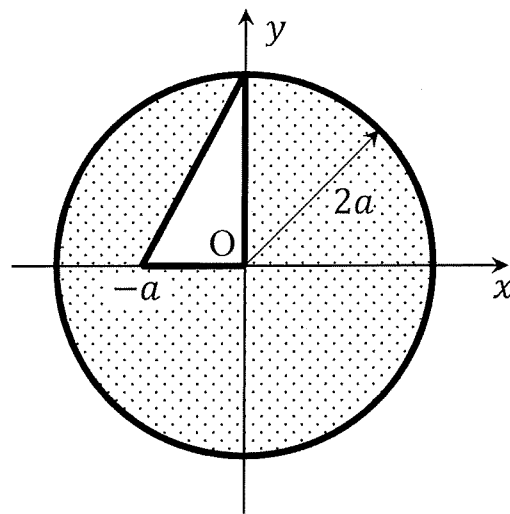


図1

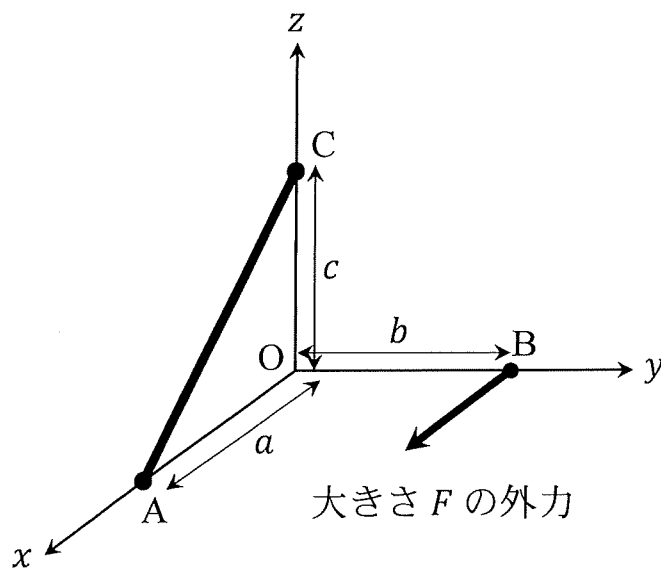
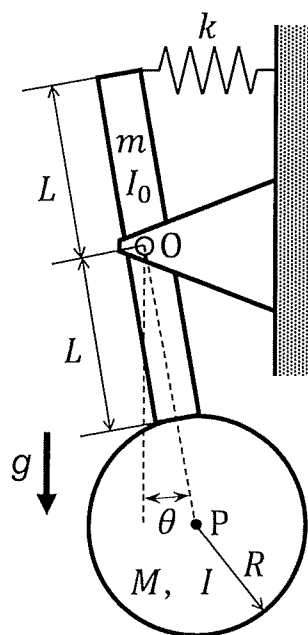


図2

2. 図のように、長さ $2L$ 、質量 m の棒と半径 R 、質量 M の円板からなる振子が、棒の中心点 O において回転自由で支持されており、振子の上端がばね定数 k のばねで剛体壁に結合されている。振子の回転角を θ 、棒の中心点 O のまわりの慣性モーメントを I_0 、円板の中心点 P のまわりの慣性モーメントを I とする。振子が鉛直方向を向いた状態 ($\theta = 0$) で静かに手を離れたところ、この振子は静止した。このとき以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度を g とする。

- (1) 点 O のまわりの円板の慣性モーメントを I , R , L , M で表せ。
- (2) 点 O のまわりの振子の振動の運動方程式を求めよ。
- (3) 回転角 θ を微小として、振子の固有振動数 f を求めよ。
- (4) 棒の慣性モーメント I_0 を、 L と m を用いて表せ。ただし、計算過程を記載すること。
- (5) 円板の慣性モーメント I を、 M と R を用いて表せ。ただし、計算過程を記載すること。



図

工業熱力学

1. 以下の問いに答えよ。

- (1) 定積比熱 $1.20 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, 温度 300 K の理想気体に一定の圧力下で $35000 \text{ kJ}/\text{kg}$ の熱量を加え, 温度 1300 K にする過程で取り出すことができる仕事 $[\text{kJ}/\text{kg}]$ を求めよ。
- (2) あるカルノーサイクル機関が 1 サイクルあたり 500 K の高温熱源から 300 kJ の熱量を受け取り, 50 K の低温熱源に排熱しているとき, 1 サイクルあたりの仕事の大きさ $[\text{kJ}/\text{kg}]$ を求めよ。
- (3) ある閉じた系において, 温度 T と比容積 v を独立変数として状態量の可逆的な微小変化を考える。比内部エネルギーの微小変化 du が偏微分 (こう配) と微小変化の積の形式で表せることを用いて, 次式を導け。ここで, P は圧力, q は熱量である。

$$dq = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + P\right] dv$$

2. 以下の問いに答えよ。

- (1) 熱の仕事当量とはなにか, 説明せよ。
- (2) 圧力一定のもとで理想気体の状態変化が起こるとき, 系内に入る熱量 δQ は系のエンタルピー変化 dH と等しいことを示せ。
- (3) (2) の結果を用いて以下の関係式を導け。ここで, c_p は定圧比熱, T は温度, P は圧力である。

$$c_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$$

3. 図のようなブレイトンサイクルがある。理想気体の作動流体 1 kg あたりの加熱量を q_H , 放熱量を q_L , 定圧比熱を c_p , 定積比熱を c_v , 比熱比を γ としたとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) このサイクルの p - v 線図を描け。状態を表す数字も記すこと。
- (2) このサイクルの断熱過程は以下の (a) ~ (d) のどの過程か。あてはまるものをすべて答えよ。
 (a) $1 \rightarrow 2$ (b) $2 \rightarrow 3$ (c) $3 \rightarrow 4$ (d) $4 \rightarrow 5$
- (3) このサイクルの理論熱効率 η_{th} が以下の式であることを導出せよ。ここで T は温度である。

$$\eta_{th} = 1 - \frac{q_L}{q_H} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

- (4) $\frac{T_1}{T_2}$ を, 圧力比 $R = \frac{p_2}{p_1}$ を用いて表せ。ここで p は圧力である。

このサイクルにおいて, 定圧比熱 = 1.10 kJ/(kg · K), タービン入口温度 = 1500 K, 圧縮機入口温度 = 300 K, 圧力比 = 9.00, 比熱比 = 1.40 とし, 以下の

(5) ~ (7) の問いに答えよ。必要ならば $9^{0.40} \approx 1.90$, $9^{1.40} \approx 2200$,

$\left(\frac{1}{9}\right)^{0.40} \approx 0.50$, $\left(\frac{1}{9}\right)^{1.40} \approx 4.60 \times 10^{-4}$ を用いてよい。

- (5) 圧縮機出口温度を求めよ。
- (6) タービン出口温度を求めよ。
- (7) このサイクルの正味の仕事を求めよ。

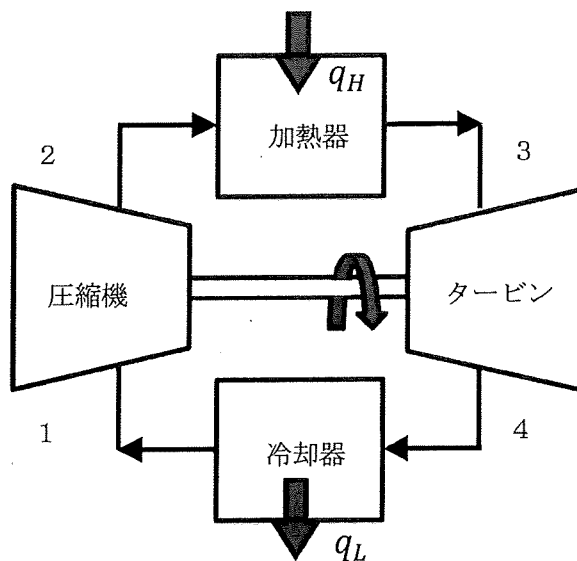


図 ブレイトンサイクルの概念図

流体力学

1. 以下の問いに答えよ。

- (1) 図1に示すノズル内流れにおけるベルヌーイの式を記せ。ただし、ここでの流れは非粘性とする。
- (2) 図2に翼上流および翼面上の流線を示す。翼先端の点Aで流線が分岐する。このような点を何というか。さらにこの点での速度の大きさを述べよ。
- (3) 図2の流れにおいて得られるベルヌーイの式を記せ。ただしここでの流れは非粘性とする。

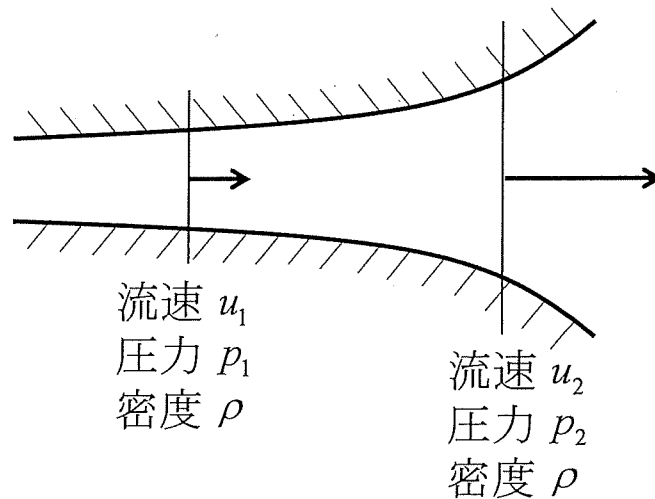


図1

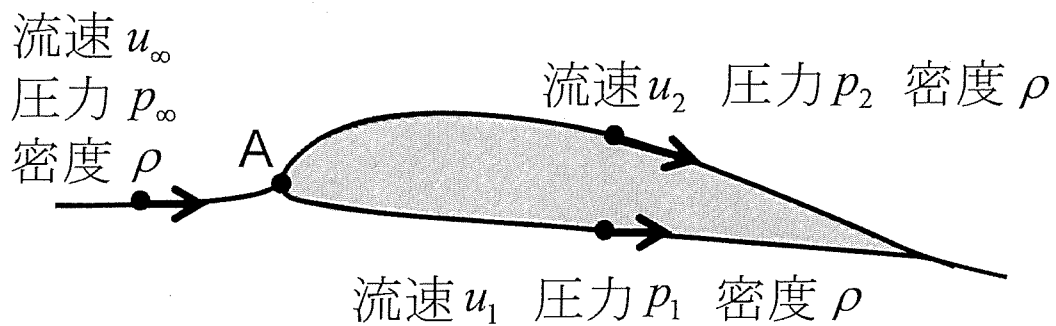


図2

2. 断面積 A の流路内を流れる一次元定常圧縮性流体において、静止した垂直衝撃波が形成されている場合、以下の問いに答えよ。なお、流体は理想気体とする。さらに衝撃波の厚みは十分薄く、衝撃波内部に作用する摩擦力、外部との熱の授受は無視できるものとする。また、 h を比エンタルピ、 M をマッハ数、 p を圧力、 R を気体定数、 T を絶対温度、 T_0 を全温度、 u を流速、 γ を比熱比、 ρ を密度とし、添字 1, 2 は衝撃波前後を表すものとする。以下の問いに答えよ

(1) 質量流量 \dot{m} は $\dot{m} = \rho Au$ で与えられる。衝撃波前後で成り立つ連続の式を記せ。

(2) 流体が持つ運動量 P は $P = \dot{m}u$ で与えられる。衝撃波前後で成り立つ運動量保存則より、以下の式が成り立つことを示せ。

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

(3) 流体の持つ全エンタルピは $h + \frac{1}{2}u^2$ となり、衝撃波前後で保存される。エネルギー保存則として以下が得られることを示せ。

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} RT_1 + \frac{1}{2}u_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_2 + \frac{1}{2}u_2^2$$

(4) (3) で示した式から、衝撃波前後で全温度 T_0 が変化しない、つまり $T_{01} = T_{02}$ となることを示せ。

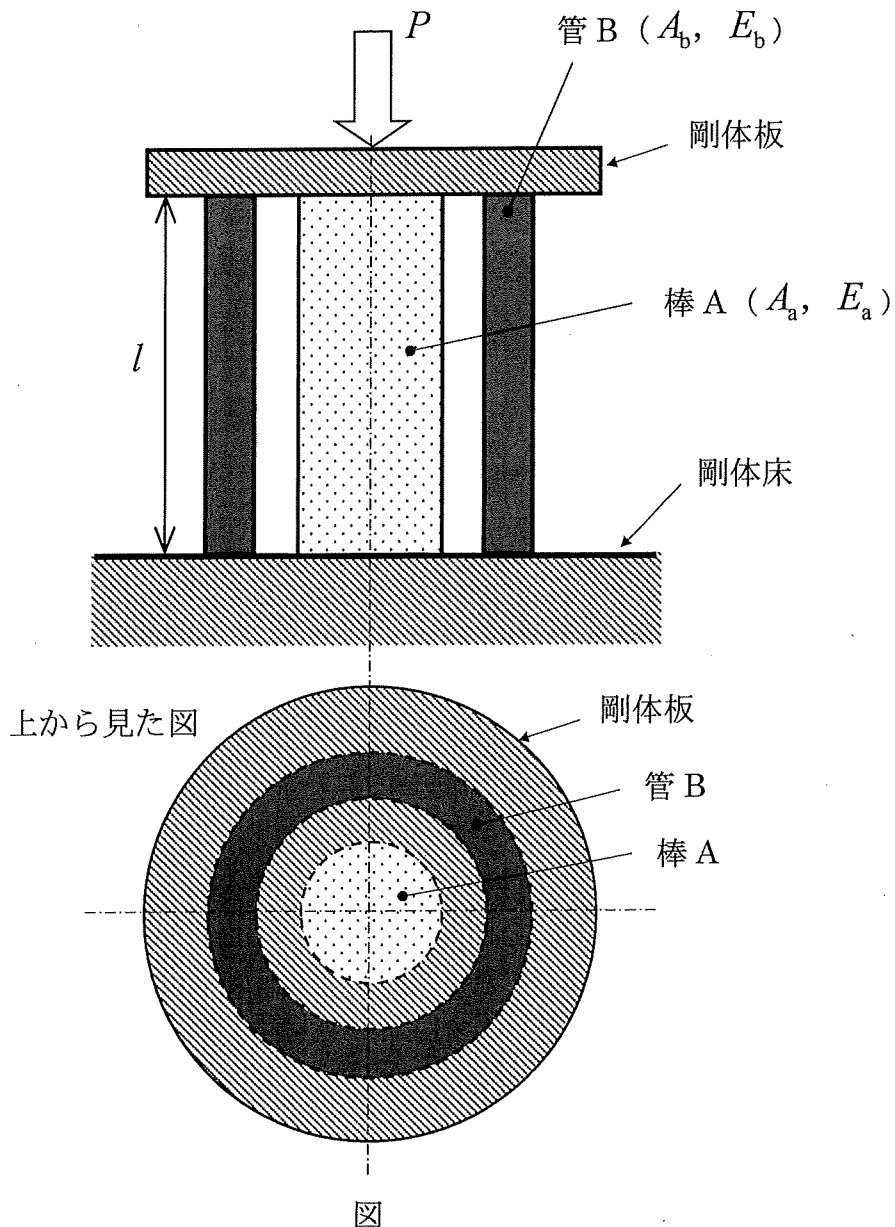
(5) 衝撃波前後で等エントロピ流れがそれぞれ得られている場合、静温度と全温度の関係式、衝撃波前後で全温度 T_0 が変化しないことから以下の式が得られることを示せ。ここで衝撃波上流、下流のマッハ数をそれぞれ M_1 , M_2 とすること。

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{(\gamma-1)M_2^2 + 2}$$

材料力学

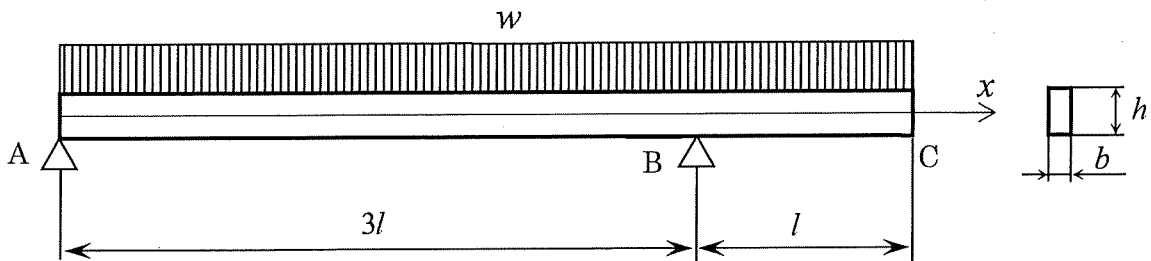
1. 図のように、棒 A が同じ長さ l の管 B に入れられ、剛体床の上に置かれている。棒 A、管 B の上に剛体板を乗せ、荷重 P で圧縮するとき、以下の問いに答えよ。ただし、棒 A、管 B の断面積はそれぞれ A_a 、 A_b 、縦弾性係数はそれぞれ E_a 、 E_b とする。

- (1) 棒 A が受ける圧縮力を P_a 、管 B が受ける圧縮力を P_b とするとき、 P 、 P_a 、 P_b にはどのような関係が成り立つか。式で表せ。
- (2) 棒 A と管 B の縮み λ が等しいことを利用して、 P_a 、 P_b を P 、 A_a 、 A_b 、 E_a 、 E_b を用いて表せ。
- (3) 棒 A と管 B の縮み λ を P 、 A_a 、 A_b 、 E_a 、 E_b 、 l を用いて表せ。



2. 図に示すように、点 A, B で単純支持された長さ $4l$ の張出しはり AC (断面形状は幅 b , 高さ h の長方形) が、はり全体にわたって一様な等分布荷重 w を受ける。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、このはりの縦弾性係数を E とし、自重は無視できるものとする。

- (1) 点 A, B における反力をそれぞれ R_A , R_B とするとき, R_A , R_B を求めよ。
- (2) 図のように、点 A から右向きに x 軸をとる。AB 間, BC 間の任意の断面における曲げモーメントをそれぞれ M_1 , M_2 とするとき, M_1 , M_2 を求めよ。
- (3) このはりの危険断面 (曲げモーメントの絶対値が最大となる箇所) はどこか答えよ。また、危険断面における最大曲げ応力を求めよ。
- (4) C 点におけるたわみを求めよ。

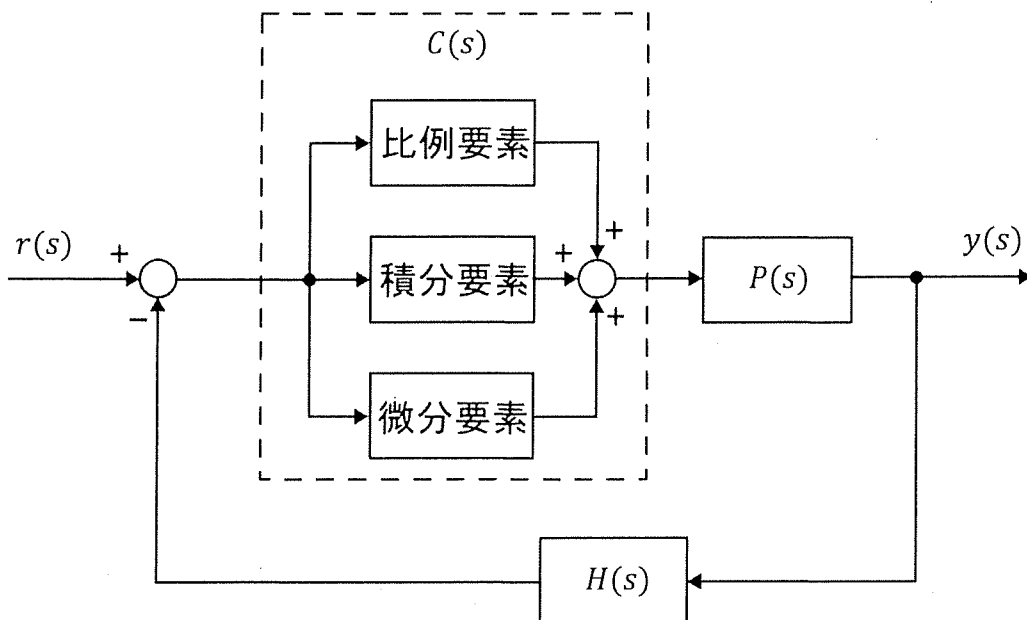


図

制 御 工 学

図に示すブロック線図について以下の問いに答えよ。ただし、 s はラプラス変数である。

- (1) 図の点線で囲った部分はPIDコントローラを表している。比例要素のゲインを K_p 、積分要素のゲインを K_I 、微分要素のゲインを K_D として、PIDコントローラの伝達関数 $C(s)$ の式を示せ。
- (2) 図の制御系の一巡伝達関数 $G_L(s)$ を求めよ。PIDコントローラは $C(s)$ と記載してよい。
- (3) 図の制御系の伝達関数 $y(s)/r(s)$ を求めよ。PIDコントローラは $C(s)$ と記載してよい。

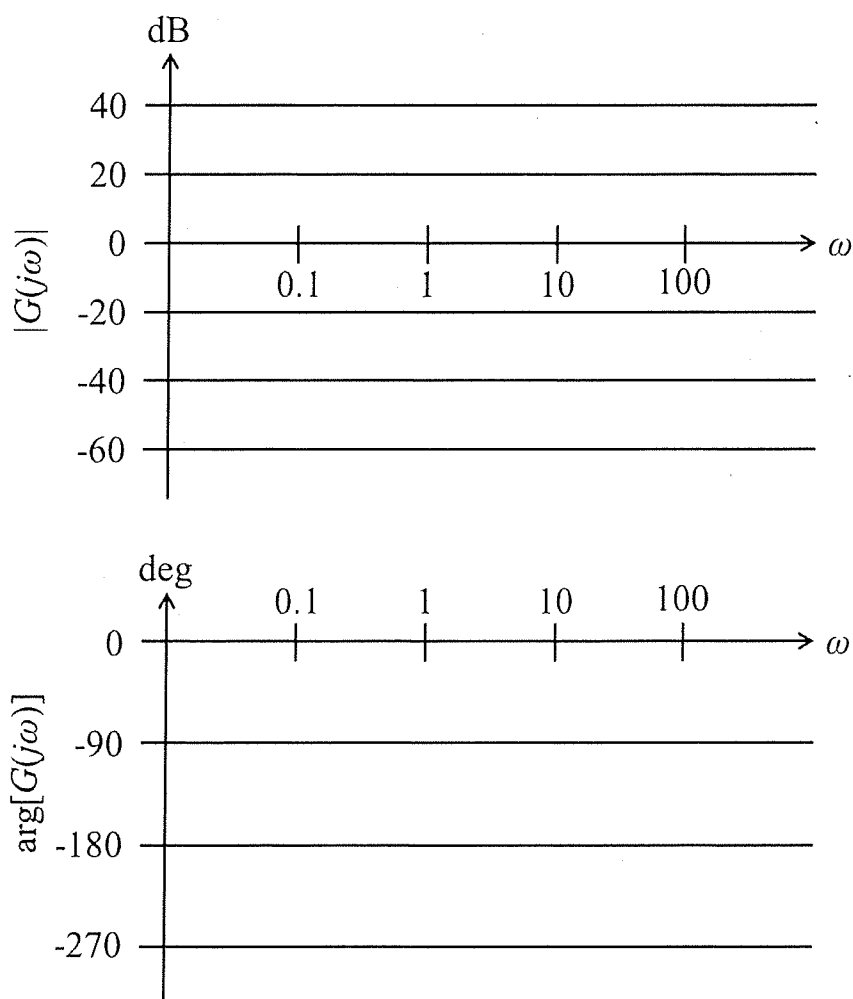


図

2. 次の伝達関数について、以下の問いに答えよ。ただし、 s はラプラス変数、 j は虚数単位、 ω は角周波数である。

$$G(s) = \frac{10}{(s + 0.1)(s + 1)(s + 10)}$$

- (1) 図を解答用紙に転写し、ボード線図の概形を描け。
- (2) 複素数平面上にナイキスト線図の概形を描け。
- (3) この伝達関数を一巡伝達関数としてもつフィードバック制御系の安定判別をナイキストの方法で行え。
- (4) この伝達関数を一巡伝達関数としてもつフィードバック制御系の安定判別をラウスの方法で行え。



図

電 気 回 路

1. 以下の問いに答えよ。

- (1) トランジスタの動作について、「エミッタ」「コレクタ」「ベース」の3つの用語を用い簡潔に述べよ。また、NPN型とPNP型の違いについても述べよ。
- (2) 空気中に孤立した半径 a [m] の導体球に帯電できる最大の電荷の値 Q [C] はいくらか。ただし、空気の絶縁を維持しながらかけられる最大電界を E_m [V/m]、誘電率を ϵ_0 [F/m] とする。
- (3) 磁束の単位 Wb (読み：ウェーバー) の定義について述べよ。

2. 以下の問いに答えよ。

- (1) 図1の直流回路において、電極面積 0.1 m^2 、電極間隔 10 mm の平行平板コンデンサに比誘電率が $\epsilon_1 = 4$ 、厚さ 4 mm 及び比誘電率が $\epsilon_2 = 6$ 、厚さ 6 mm の2種類の誘電体が電極と並行に挿入されている。このコンデンサに 20 V の直流電圧を印加したとき、蓄えられる電荷の値 Q [C] はいくらか。ただし、真空中の誘電率を $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ とする。
- (2) 図2の交流回路において、実効値電圧が 100 V の電源の周波数を変化させたところ、共振時のインダクタンス L の端子電圧 $V_L = 31.4 \text{ V}$ であった。共振周波数 f_c の値 [Hz] はいくらか。

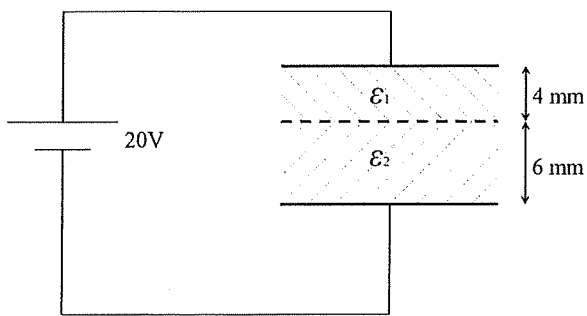


図 1

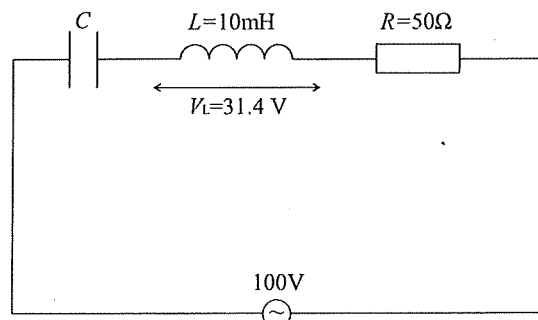
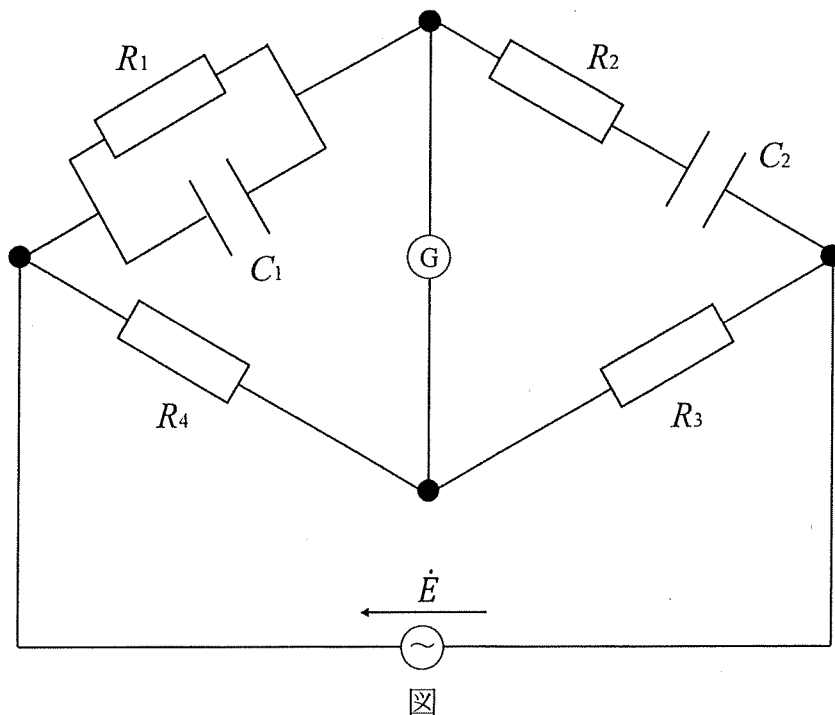


図 2

3. 図のような交流ブリッジ回路において、交流電源の電圧を \dot{E} 、その角周波数を ω とする。 R_1, R_2 は既知の抵抗、 C_1, C_2 は容量が既知のコンデンサであり、 R_3, R_4 は未知の抵抗である。交流検流器 G の指示がゼロとなりブリッジが平衡状態にあるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 並列につながれた抵抗 R_1 とコンデンサ C_1 の合成インピーダンス Z_1 を虚数単位 j と角周波数 ω を用い、複素数表記であらわせ。
- (2) 直列につながれた抵抗 R_2 とコンデンサ C_2 の合成インピーダンス Z_2 を虚数単位 j と角周波数 ω を用い、複素数表記であらわせ。
- (3) このブリッジの平衡条件を Z_1, Z_2, R_3, R_4 を用いてあらわせ。
- (4) (3) の平衡条件式において左辺右辺の実部が等しいことから、 R_3/R_4 を R_1, R_2, C_1, C_2 を用いてあらわせ。
- (5) (3) の平衡条件式において左辺右辺の虚部が等しいことから、角周波数 ω を R_1, R_2, C_1, C_2 を用いてあらわせ。



科目	小問	出題意図
例 流体力学	1	圧縮性流体一次元等エントロピー流れの理解力をみる。
数学	1	多変数関数の多重積分に関する計算能力をみている。
	2	行列の固有値、固有ベクトルの理解度、及びそれに関する計算能力をみている。
	3	複素関数、複素積分の理解度、計算能力をみている
	4	ベクトル解析につき、計算能力をみている
	5	フーリエ級数展開に関する理解力をみる
	6	ラプラス逆変換に関する理解力をみる
工業力学	1	大学学部の「工業力学」における重要な学修テーマの一つに「剛体の回転運動」がある。ここでは、物体の重心がどこにあるかを理解すること、所与の回転軸まわりに外力モーメントの大きさを評価できることが肝要である。そこで、各小問においてこれらを問うている。 (1) 簡単な幾何形状の組み合わせからなる物体について、重心位置を求めることができるかどうかを見ている。 (2) 所与の外力によって所与の回転軸まわりに生ずるモーメントの大きさを評価できるかどうかを見ている。
	2	大学学部の「工業力学」における重要な学修テーマとして「剛体の慣性モーメント」、「剛体の回転運動」、および「調和振動」がある。そこで、バネ力と重力による剛体の回転調和振動を解く問題設定としている。 (1) 回転中心を替える場合の慣性モーメント換算方法を習得しているかどうかを見ている。 (2) 剛体の回転の運動方程式を立式できるかどうかを見ている。 (3) 運動方程式から調和振動の固有振動数を求めることができるかどうかを見ている。 (4) (5) 単純幾何形状の物体の慣性モーメントを計算できるかどうかを見ている。
工業熱力学	1	比熱、熱量、熱力学第1法則の理解度を確認する。 また、カルノーサイクルの熱効率、内部エネルギーの理解度を確認する。
	2	熱量と仕事量の変換の計算方法、理想気体の状態変化とエンタルピーの関係についての理解度を確認する。
	3	ブレイトンサイクルに関連する基礎的な事項の理解度を確認する。
流体力学	1	ベルヌーイの定理の基礎的事項につき、理解度を確認する。
	2	垂直衝撃波の基礎的事項につき、理解度を確認する。

科目	小問	出題意図
材料力学	1	円柱と円管からなる並列組み合わせ不静定構造の理解力をみる
	2	張出はりが等分布荷重をうける場合の曲げ応力, たわみ解析に関する理解力をみる
制御工学	1	制御工学の基礎である伝達関数の理解度を確認する.
	2	制御系の安定性に関する理解度を確認する
電気回路	1	これまでの過去問と同様, 半導体, 静電荷, 単位などの幅広い分野における一定レベルの基礎知識を問うことを目的として出題した.
	2	これまでの過去問を踏まえ, コンデンサ, コイルなどの理解について問うことを目的として出題した.
	3	航空宇宙分野では歪ゲージを用いた構造部材強度の計測や, 歪圧力計を用いたエンジン燃焼室圧力計測などにおいて頻繁にブリッジ回路が用いられる. この基本原理についての理解を問うことを目的として出題した.

数 学 解 答

問題 1 1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおく.

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_D (x-y)^2 dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 (\cos \theta - \sin \theta)^2 r dr d\theta dz \\
 &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 (\cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) dr d\theta dz & I &= \frac{a^4 h}{4} \left[\theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a d\theta & &= \pi \frac{a^4 h}{2} \\
 &= \frac{a^4 h}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \sin 2\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

2) $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ 極座標変換する.

$$\begin{aligned}
 (x-y)^2 &= r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi) \\
 &= r^2 \sin^2 \theta (1 - \sin 2\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_D (x-y)^2 dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin^2 \theta (1 - \sin 2\varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^4 \sin^3 \theta (1 - \sin 2\varphi) dr d\theta d\varphi & I &= \frac{2\pi a^5}{5} \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin 2\varphi) d\varphi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a d\theta & &= \frac{8\pi a^5}{15} \\
 &= \frac{a^5}{5} \left[\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} \int_1^{-1} -(1-t^2) dt \quad t = \cos \theta \quad dt = -\sin \theta d\theta
 \end{aligned}$$

問題2 1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{とおく.}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 0.5 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 0.5)(\lambda - 2) + (\lambda - 2) + (\lambda - 0.5) \\ &= -\lambda^3 + 2.5\lambda^2 + \lambda - 2.5 \\ &= -\lambda^2(\lambda - 2.5) + \lambda - 2.5 \\ &= (\lambda - 2.5)(1 - \lambda^2) = 0 \quad \lambda = -1, 1, 2.5 \end{aligned}$$

2) 最大の固有値は2.5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2.5 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 1 & 1 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} -2x + z = 0 \\ -\frac{y}{2} + z = 0 \\ x + y - \frac{5z}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問題3

1) $z = a + re^{i\theta}$ とおく. $dz = ire^{i\theta} d\theta$

$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

2) 関数 $f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$ は、 $z = \pm i$ 以外では正則である。 $z = i, z = -i$ の点を囲む経路を

それぞれ、 Γ_1, Γ_2 とする。

$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{2z}{z^2+1} dz = \int_C \left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right) dz \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z-i} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z+i} dz \\ &= 2\pi i + 2\pi i \\ &= 4\pi i \end{aligned}$$

前問の結果より、 $a=i, -i$ と置けば、それぞれの積分は、 $2\pi i$ となる。

4. ベクトル場 $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$ の $\operatorname{div} \mathbf{F}$, $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ を求めよ。

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xz) + \frac{\partial}{\partial z}(2yz) = 2xy + 2y$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2xz & 2yz \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 2yz & x^2y \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2y & -2xz \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \{2z - (-2x)\}\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (-2z - x^2)\mathbf{k} = (2x + 2z)\mathbf{i} - (x^2 + 2z)\mathbf{k} \end{aligned}$$

5. 周期 2π をもつ次の関数をフーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pi \end{cases}$$

$f(x)$ は奇関数

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[x \frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{-\cos nx}{n} dx \\ &= -\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1 + (-1)^{n+1}}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right\}$$

6. 次の関数のラプラス逆変換を求めよ。

$$\frac{2s + 3}{s^2 - 3s + 2}$$

$$L(s) = \frac{2s + 3}{s^2 - 3s + 2} = \frac{2s + 3}{(s - 2)(s - 1)} \quad (1)$$

これを部分分数分解して

$$L(s) = \frac{a}{s - 2} + \frac{b}{s - 1} \quad (2)$$

(2)から

$$(s - 2)L(s)|_{s=2} = a, \quad (s - 1)L(s)|_{s=1} = b$$

である。

(1) から

$$(s - 2)L(s)|_{s=2} = \frac{2s + 3}{s - 1} \Big|_{s=2} = 7$$

$$(s - 1)L(s)|_{s=1} = \frac{2s + 3}{s - 2} \Big|_{s=1} = -5$$

となり $a=7, b=-5$ を得る。したがって

$$L(s) = \frac{7}{s - 2} + \frac{-5}{s - 1}$$

これより $L(s)$ のラプラス逆変換は

$$7e^{2x} - 5e^x$$

1.

(1) 穴の部分は、負の面積の物体が重なっているものとして扱う。円板の面積は $4\pi a^2$ 、重心は

$(0, 0)$ 、三角形の面積は a^2 、重心の座標は $(-\frac{a}{3}, \frac{2a}{3})$ であるから、面密度を ρ として、

$$x_{CG} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \rho S_i x_i}{\sum \rho S_i} = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i} = \frac{4\pi a^2 \cdot 0 + (-a^2) \cdot (-\frac{a}{3})}{4\pi a^2 - a^2} = \frac{\frac{a^3}{3}}{(4\pi - 1)a^2} = \frac{a}{3(4\pi - 1)}$$

$$y_{CG} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \rho S_i y_i}{\sum \rho S_i} = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} = \frac{4\pi a^2 \cdot 0 + (-a^2) \cdot \frac{2a}{3}}{4\pi a^2 - a^2} = \frac{-\frac{2a^3}{3}}{(4\pi - 1)a^2} = -\frac{2a}{3(4\pi - 1)}$$

(2) 外力ベクトルは $\vec{F} = (F, 0, 0)$ 。 $\vec{AB} = (-a, b, 0)$ 。よってこの外力が点 A まわりに作るモーメント \vec{M}_A は、

$$\vec{M}_A = \vec{AB} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{i}(b \cdot 0 - 0 \cdot 0) + \vec{j}(0 \cdot F - (-a) \cdot 0) + \vec{k}((-a) \cdot 0 - b \cdot F)$$

$$= -bF\vec{k} = (0, 0, -bF)$$

次に、 $\vec{AC} = (-a, 0, c)$ 。モーメント \vec{M}_A の AC 方向成分 M_{AC} は、

$$M_{AC} = \vec{M}_A \cdot \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = (0, 0, -bF) \cdot \frac{(-a, 0, c)}{\sqrt{a^2 + c^2}} = -\frac{bcF}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\text{よって} \quad |M_{AC}| = \frac{bcF}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2.

(1) 平行軸の定理より、点 O まわりの円板の慣性モーメントは、

$$I + M(L + R)^2$$

(2) ばねの復元力によるモーメントは $kL^2\theta$ 、重力によるモーメントは $Mg(L + R) \sin \theta$ なので運動方程式は、

$$\{I_0 + I + M(L + R)^2\}\ddot{\theta} + kL^2\theta + Mg(L + R) \sin \theta = 0$$

(3) θ を微小とすると、運動方程式は、

$$\{I_0 + I + M(L + R)^2\}\ddot{\theta} + kL^2\theta + Mg(L + R)\theta = 0$$

したがって固有振動数は、

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kL^2 + Mg(L + R)}{I_0 + I + M(L + R)^2}}$$

(4) 棒の単位長さ当たりの質量を ρ とすると、 $\rho = m/2L$

$$I_0 = \int_{-L}^L \rho x^2 dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L}^L = \rho \frac{2L^3}{3} = \frac{1}{3} mL^2$$

(5) 円板の単位面積当たりの質量を ρ' とすると、 $\rho' = M/\pi R^2$

$$I = \int_0^R \rho' 2\pi x \cdot x^2 dx = 2\pi\rho' \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^R = 2\pi\rho' \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$$

工業熱力学 解答例

1.

(1) 熱力学第1法則と熱量の式より、

$$\Delta W = \Delta Q - C_v \times \Delta T = 35000 - 1.20 \times (1300 - 300) = 33800 \text{ [kJ/kg]}$$

が取り出すことができる仕事である。

(2) カルノーサイクルの熱効率

$$\eta = 1 - 300/500 = 0.40$$

よって、この1サイクルあたりの仕事 $L = \eta \times Q_h = 0.40 \times 500 = 200 \text{ [kJ/kg]}$

(3) 比内部エネルギーの微小変化 du は、温度の微小変化 dT 、容積の微小変化 dv を用いて次式のように表される。

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$$

上式に熱力学第1法則 $dq = du + PdV$ を代入して変形すると次式を得る。

$$dq = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + P\right] dv$$

2.

(1) 解答例)

・仕事量を熱量（熱量を仕事量）に換算するための比例定数である。

(2) 状態関数エンタルピーは、 $H = U + PV$ で定義される。

これを微分すると

$$dH = dU + PdV + VdP \quad \text{①}$$

また、熱力学第一則より

$$dU = \delta Q - PdV \quad \text{②}$$

②式を①式に代入すると以下が得られる。

$$dH = \delta Q + VdP$$

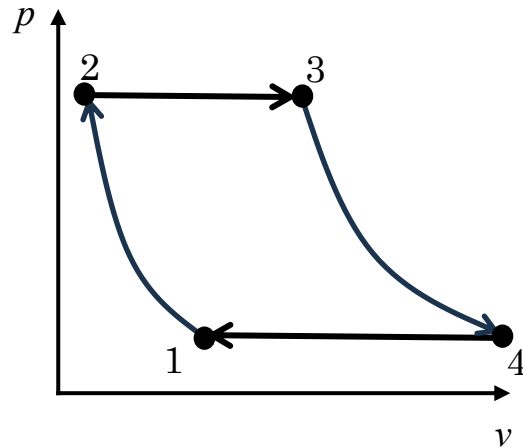
題意より、 $dP = 0$ であるから、 $dH = \delta Q$ となる。

(3) (2) の式を定圧比熱の定義式に代入すると導かれる。

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$$

3.

(1)



(2) (a) と (c) .

$$(3) \quad q_H = c_p(T_3 - T_2)$$

$$q_L = c_p(T_4 - T_1)$$

$$\eta_{th} = 1 - \frac{q_L}{q_H} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2} \text{ より, } \eta_{th} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad .$$

$$(4) \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad .$$

$$(5) \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \text{ より, } T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 300 \times 9^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 570 \text{ K.}$$

$$(6) \quad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \text{ より, } T_4 = T_3 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1500 \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 750 \text{ K.}$$

$$(7) \quad \text{タービンによる膨張仕事} = c_p(T_3 - T_4)$$

$$\text{圧縮機による圧縮仕事} = c_p(T_2 - T_1)$$

$$\text{正味仕事} = \text{膨張仕事} - \text{圧縮仕事} = c_p\{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)\}$$

$$= 1.10 \times ((1500 - 750) - (570 - 300)) = 528 \text{ kJ/kg.}$$

1.

(1)

図1よりベルヌーイの式は

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2$$

(2)

流線の分岐点のことをよどみ点という。

流線が分岐する点で0でない流速が得られると仮定した場合、流線上の一つの点で複数の速度を有することになり、流線の性質に矛盾することから分岐点での速度の大きさは0になる。

(3)

ベルヌーイの式は流線上で成り立つことから、翼の上流と翼の上面を通る流線上において

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2$$

翼の上流と翼の下面を通る流線上において

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2$$

がそれぞれ成り立つ。

2.

(1)

連続の式は質量保存則を表すので、衝撃波上流、下流の質量流速が等しくなり、以下の式が得られる。

$$\dot{m} = \rho_1 A u_1 = \rho_2 A u_2$$

($\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ でも可)

(2)

運動量の法則から、衝撃波前後の運動量の差が力に等しくなる。ここで作用する力は、衝撃波の厚さ十分に小さいため摩擦力は無視でき、圧力による力のみとなる。運動量の法則より、

$$\begin{aligned}
P_2 - P_1 &= p_1 A - p_2 A \\
P_1 + p_1 A &= P_2 + p_2 A \\
\dot{m}u_1 + p_1 A &= \dot{m}u_2 + p_2 A \\
\rho_1 A u_1 u_1 + p_1 A &= \rho_2 A u_2 u_2 + p_2 A \\
p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2
\end{aligned}$$

(3)

エネルギー保存則より衝撃波前後で全エンタルピが保存される。よって

$$\begin{aligned}
h_1 + \frac{1}{2}u_1^2 &= h_2 + \frac{1}{2}u_2^2 \\
C_p T_1 + \frac{1}{2}u_1^2 &= C_p T_2 + \frac{1}{2}u_2^2
\end{aligned}$$

ここでは理想気体を扱っているので、

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$$

よって

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} RT_1 + \frac{1}{2}u_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_2 + \frac{1}{2}u_2^2$$

が得られる。

(4)

衝撃波上流，下流の全温度が得られる点では $u_1 = 0$ および $u_2 = 0$ がそれぞれ成り立つので， T_{01} および T_{02} を衝撃波上流，下流の全温度とすると，

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{\gamma-1} RT_{01} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_{02} \\
T_{01} &= T_{02}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

(5)

(3) で求めた式より， $\frac{\gamma}{\gamma-1} RT_1 + \frac{1}{2}u_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_2 + \frac{1}{2}u_2^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_0$ 。ここで

$T_{01} = T_{02} = T_0$ とおいている。音速を a とすると $a = \sqrt{\gamma RT}$ より，

$$\frac{a_1^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u_1^2 = \frac{a_2^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u_2^2 = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

となり，さらに

$$\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2}M_1^2 = \frac{1}{\gamma-1} \frac{a_0^2}{a_1^2} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{T_0}{T_1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2}M^2 = \frac{1}{\gamma-1} \frac{a_0^2}{a_2^2} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{T_0}{T_2} \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。

ここで、 M はマッハ数で $M = \frac{u}{a}$ である。

①および②式の辺々割り算して T_0 を消去し、整理すると、

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{(\gamma-1)M_2^2 + 2}$$

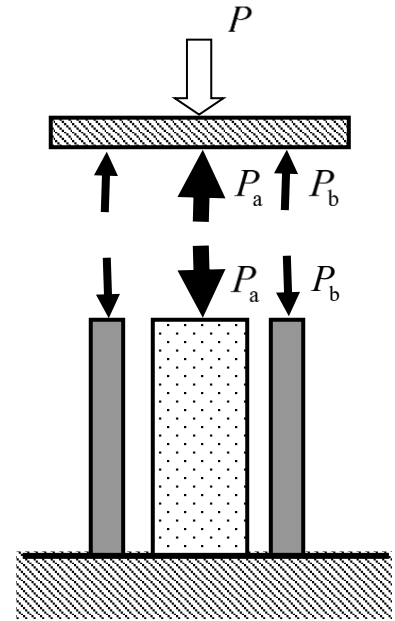
が得られる。

令和8年度 材料力学 解答例

1.

(1) 剛体板のつり合いより,

$$P_a + P_b = P \quad \dots(1) \quad \boxed{\text{答}}$$



(2) 棒 A と管 B の縮み λ が等しいので,

$$\lambda = \frac{P_a l}{E_a A_a} = \frac{P_b l}{E_b A_b} \quad \dots(2)$$

$$(2) \text{より, } P_a = \frac{E_a A_a}{E_b A_b} P_b \quad \dots(3)$$

$$(1) \text{に代入して, } \frac{E_a A_a}{E_b A_b} P_b + P_b = P \Leftrightarrow \left(\frac{E_a A_a}{E_b A_b} + 1 \right) P_b = P \Leftrightarrow \frac{E_a A_a + E_b A_b}{E_b A_b} P_b = P$$

$$\Leftrightarrow P_b = \frac{E_b A_b}{E_a A_a + E_b A_b} P \quad \dots(4) \quad \boxed{\text{答}}$$

$$(4) \text{を}(3) \text{に代入して, } P_a = \frac{E_a A_a}{E_b A_b} \times \frac{E_b A_b}{E_a A_a + E_b A_b} P \Leftrightarrow \frac{E_a A_a}{E_a A_a + E_b A_b} P \quad \dots(5) \quad \boxed{\text{答}}$$

$$(3) (2) \text{より, } \lambda = \frac{P_a l}{E_a A_a} = \frac{l}{E_a A_a} \times \frac{E_a A_a}{E_a A_a + E_b A_b} P = \frac{Pl}{E_a A_a + E_b A_b} \quad \dots(6) \quad \boxed{\text{答}}$$

2.

(1) はり全体のつり合いより,

$$\text{力: } R_A + R_B - 4wl = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{モーメント (B 点中心, CW+): } R_A \cdot 3l - 4wl \times l = 0 \quad \dots(2)$$

$$(2) \text{より, } R_A = \frac{4}{3} wl \quad \dots(3) \quad \boxed{\text{答}}$$

$$(3) \text{を}(1) \text{に代入して, } R_B = \frac{8}{3} wl \quad \dots(4) \quad \boxed{\text{答}}$$

(2) AB間 ($0 \leq x \leq 3l$) において, 下図自由体①のつり合いより,

$$\text{モーメント: } R_A x - wx \times \frac{x}{2} - M_1 = 0 \Leftrightarrow M_1 = R_A x - \frac{w}{2} x^2 = \frac{4}{3} wl x - \frac{w}{2} x^2 \quad \dots(5) \quad \boxed{\text{答}}$$

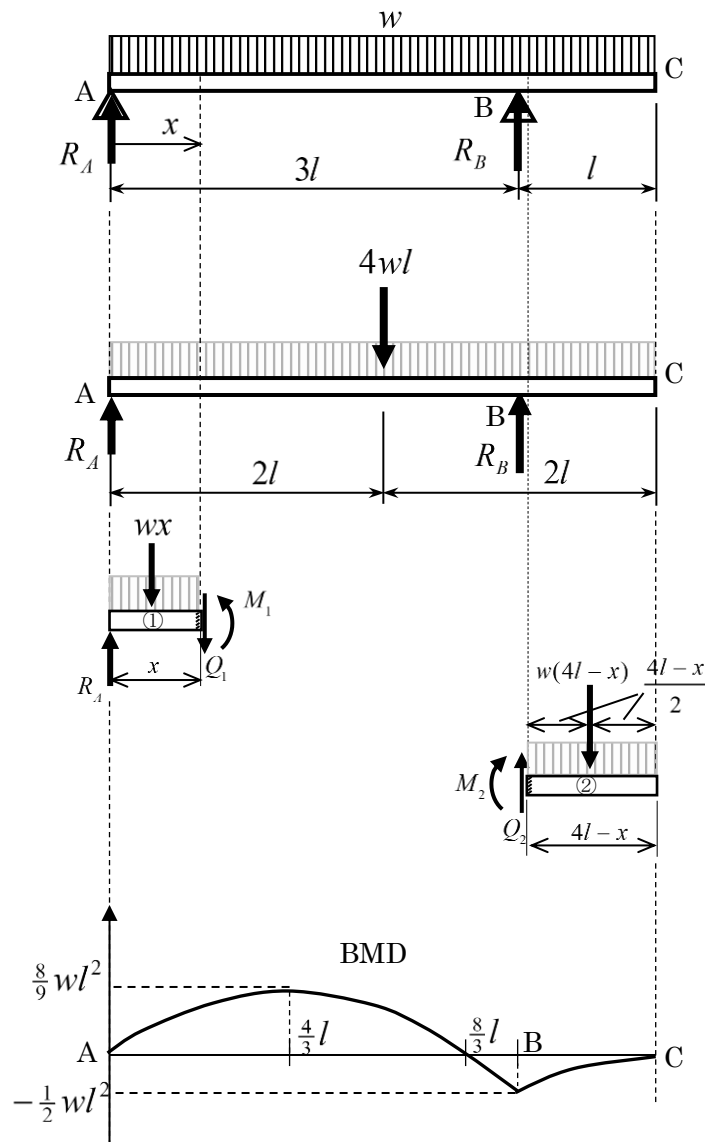
BC間 ($3l \leq x \leq 4l$) において, 下図自由体②のつり合いより,

$$\text{モーメント: } M_2 + w(4l-x) \times \frac{4l-x}{2} = 0 \Leftrightarrow M_2 = -\frac{w}{2} (4l-x)^2 \quad \dots(6) \quad \boxed{\text{答}}$$

(3) (5)式を変形すると, $M_1 = -\frac{w}{2} x^2 + \frac{4}{3} wl = -\frac{w}{2} \left(x - \frac{4}{3}l\right)^2 + \frac{8}{9} wl^2$

(5), (6) 式より曲げモーメント線図 (BMD) を描くと下図のようになる。よって, 曲げモーメントの絶対値が最大となる危険断面は, $x = \frac{4}{3}l$ の箇所。… $\boxed{\text{答}}$

この箇所での最大曲げ応力 σ_{\max} は, $\sigma_{\max} = \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2} = \frac{8wl^2}{9} \times \frac{12}{bh^3} \times \frac{h}{2} = \frac{16wl^2}{3bh^2} \quad \dots\boxed{\text{答}}$



(4) AB, BC 間に関する量にそれぞれ添字 1, 2 をつけて表す。

[AB 間($0 \leq x \leq 3l$)]

$$M_1 = -\frac{w}{2}x^2 + \frac{4}{3}wlx$$

$$\text{たわみの式: } EI \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -M_1 = \frac{w}{2}x^2 - \frac{4}{3}wlx \quad \cdots(7)$$

$$\text{積分して, } EI \frac{dy_1}{dx} = \frac{w}{6}x^3 - \frac{2}{3}wlx^2 + C_1 \quad \cdots(8)$$

$$\text{さらに積分して, } EIy_1 = \frac{w}{24}x^4 - \frac{2}{9}wlx^3 + C_1x + C_2 \quad \cdots(9)$$

$$\text{境界条件 (i) } x=0 \text{ のとき } y_1=0 \xrightarrow{(9)} C_2=0 \quad \cdots(10)$$

$$\text{(ii) } x=3l \text{ のとき } y_1=0 \xrightarrow{(9),(10)} C_1 = \frac{7}{8}wl^3 \quad \cdots(11)$$

[BC 間($3l \leq x \leq 4l$)]

$$M_2 = -\frac{w}{2}(4l-x)^2$$

$$\text{たわみの式: } EI \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -M_2 = \frac{w}{2}(4l-x)^2 \quad \cdots(12)$$

$$\text{積分して, } EI \frac{dy_2}{dx} = -\frac{w}{6}(4l-x)^3 + C_3 \quad \cdots(13)$$

$$\text{さらに積分して, } EIy_2 = \frac{w}{24}(4l-x)^4 - C_3(4l-x) + C_4 \quad \cdots(14)$$

$$\text{境界条件 (iii) } x=3l \text{ のとき } y_2=0 \xrightarrow{(14)} \frac{wl^4}{24} - C_3l + C_4 = 0 \quad \cdots(15)$$

$$\text{(iv) } x=3l \text{ のとき } \frac{dy_2}{dx} = \frac{dy_1}{dx} \xrightarrow{(13),(8),(11)} -\frac{wl^3}{6} + C_3 = \frac{w}{6} \cdot 27l^3 - \frac{2wl}{3} \cdot 9l^2 + \frac{7}{8}wl^3$$

$$\therefore C_3 = -\frac{11}{24}wl^3 \quad \cdots(16)$$

$$\text{(15), (16)より, } C_4 = -\frac{1}{2}wl^4 \quad \cdots(17)$$

C 点のたわみ y_c は(14)式に $x=4l$ を代入すれば求まる。よって,

$$y_c = y_{2(x=4l)} = \frac{C_4}{EI} = -\frac{wl^4}{2EI} = -\frac{wl^4}{2E} \times \frac{12}{bh^3} = -\frac{6wl^4}{Ebh^3} \quad \cdots \boxed{\text{答}}$$

制御工学解答例

1.

(1) PID コントローラの伝達関数 $C(s)$ は

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

(2) 図の一巡伝達関数 $G_L(s)$ は

$$G_L(s) = C(s)P(s)H(s)$$

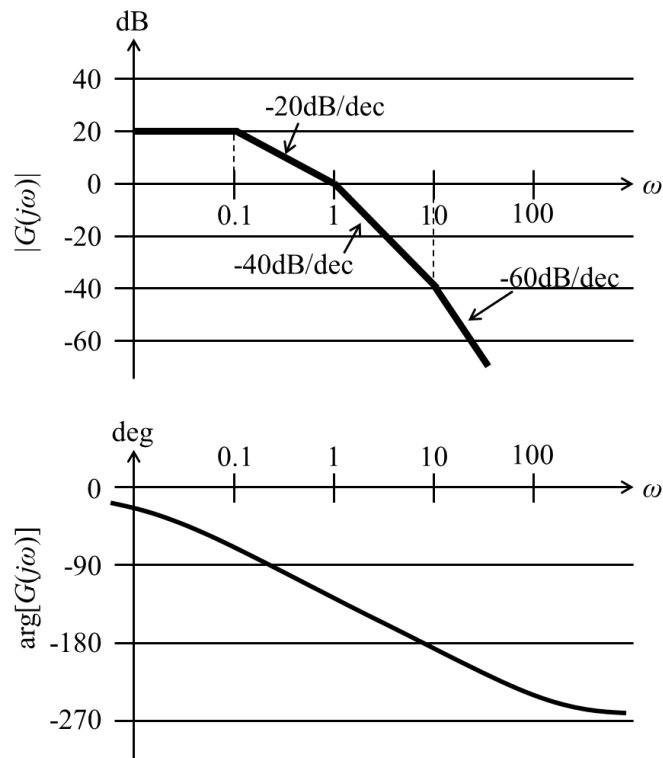
(3) 図の伝達関数 $y(s)/r(s)$ は

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)}$$

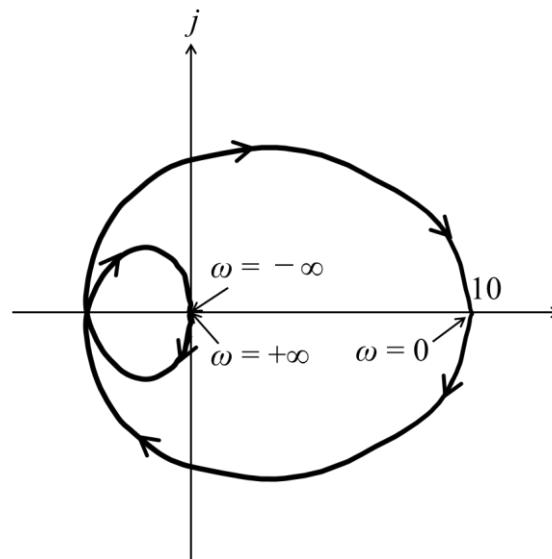
2. (1)

$$G(s) = 10 \times \frac{1}{1 + \frac{s}{0.1}} \times \frac{1}{1 + s} \times \frac{1}{1 + \frac{s}{10}}$$

と書けるので、ボード線図の概形は次のようになる。



(2) ナイキスト線図の概形は次の通り



(3) $G(s)$ は複素数平面の右半面に極を持たないのでナイキスト線図が $(-1, 0j)$ を右に見て一度もまわらなければ安定である。ボード線図から明らかなように位相曲線が -180° の ω でゲインは負である (ベクトル $G(j\omega)$ が実軸と -180° の角度のとき, このベクトルの長さは1以下である)。つまり, ナイキスト線図は実軸と -1 より右側で交わる。従って, ナイキスト線図は $(-1, 0j)$ を右に見てまわることがないのでフィードバック制御系は安定である。

(4) 制御系の特性方程式は $1 + G(s) = 0$, すなわち $s^3 + 11.1s^2 + 11.1s + 11 = 0$ となる。係数は全て存在し, 正である。また, ラウスの表を作ると

1	11.1
11.1	11
10.11	
0.91	

となり, 左端の係数はすべて正となる。従って, このフィードバック制御系は安定である。

電気回路 FY2025 前期 解答

1. 以下の問いに答えよ。

- (1) トランジスタの動作について、「エミッタ」「コレクタ」「ベース」の3つの用語を用い簡潔に述べよ。また、NPN型とPNP型の違いについても述べよ。

解答例：エミッタ - ベース間のわずかな電流を ON / OFF することで、エミッタ - コレクタ間の電流の ON / OFF 制御ができる。

ベース→エミッタに電流を流すとコレクタ→エミッタに電流が流れるのが NPN 型。エミッタからベースに電流が流れ込むとエミッタ→コレクタに電流が流れるのが PNP 型。

- (2) 空気中に孤立した半径 a [m] の導体球に帯電できる最大の電荷の値 Q [C] はいくらか。ただし、空気の絶縁を維持しながらかけられる最大電界を E_m [V/m]、誘電率を ϵ_0 [F/m] とする。

電荷 Q が半径 a の位置に作る電界は

$$E_m = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

よって

$$Q = 4\pi\epsilon_0 a^2 E_m$$

- (3) 磁束の単位 Wb (読み：ウェーバー) の定義について述べよ。

1 巻きの閉回路に対し 1 秒間に 1Wb の磁束変化を与えた時、1V の起電力が生じる。

2. 以下の問いに答えよ。

- (1) 図1の直流回路において、電極面積 0.1 m^2 、電極間隔 10 mm の平行平板コンデンサに比誘電率が $\epsilon_1=4$ 、厚さ 4 mm 及び比誘電率が $\epsilon_2=6$ 、厚さ 6 mm の2種類の誘電体が電極と並行に挿入されている。このコンデンサに 20 V の直流電圧を印加したとき、蓄えられる電荷の値 $Q[\text{C}]$ はいくらか。ただし、真空中の誘電率を $\epsilon_0=8.85 \times 10^{-12}\text{ F/m}$ とする。

コンデンサの容量は

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d}$$

(但し ϵ_r は比誘電率)で与えられる。また、誘電率の異なる2つの誘電体から成る部分はコンデンサの直列接続とみなすことが出来る。直列接続された2つのコンデンサ C_1 、 C_2 の合成容量 C は

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_1 \epsilon_0 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 \epsilon_0 S} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0 S} \left(\frac{4}{4} + \frac{6}{6} \right) 10^{-3} = \frac{2 * 10^{-3}}{\epsilon_0 S} \end{aligned}$$

よって

$$C = 0.5 \epsilon_0 S * 10^3$$

コンデンサに蓄えられる電荷は $Q=CV$ なので、

$$Q = 20 * 0.5 \epsilon_0 S * 10^3 = 20 * 0.5 * 0.1[\text{m}^2] * 10^3 \epsilon_0 = 8.85 * 10^{-9}[\text{C}]$$

*なお、問題中に与えられた数値より、有効数字は1桁でも正解とする。

- (2) 図2の交流回路において、実効値電圧が100Vの電源の周波数を変化させたところ、共振時のインダクタンス L の端子電圧 $V_L=31.4\text{V}$ であった。共振周波数の値[Hz]はいくらか。

LCR回路のインピーダンスは

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

で、カッコ内がゼロの時共振し、インピーダンスが最小となる。この時 $Z=R$ 。

電源電圧が100Vなので、回路に流れた電流は $100/R = 2\text{A}$

また、インダクタンス L の両端の電圧 $V_L=31.4\text{V}$ より

$$V_L = \omega L I = 2\pi f_c L I$$

$$f_c = \frac{V_L}{2\pi L I} = \frac{31.4}{4 * 3.14 * 10^{-2}} = 2.5 * 10^2 [\text{Hz}]$$

*なお、問題中に与えられた数値より、有効数字は2桁で正解とする。

3. 図のような交流ブリッジ回路において、交流電源の電圧を E 、その角周波数を ω とする。 R_1 、 R_2 は既知の抵抗、 C_1 、 C_2 は容量が既知のコンデンサであり、 R_3 、 R_4 は未知の抵抗である。交流検流器 G の指示がゼロとなりブリッジが平衡状態にあるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 並列につながれた抵抗 R_1 とコンデンサ C_1 の合成インピーダンス Z_1 を虚数単位 j と角周波数 ω を用い、複素数表記であらわせ。

$$Z_1 = \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1\right)^{-1}$$

- (2) 直列につながれた抵抗 R_2 とコンデンサ C_2 の合成インピーダンス Z_2 を虚数単位 j と角周波数 ω を用い、複素数表記であらわせ。

$$Z_2 = \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)$$

(3) このブリッジの平衡条件を Z_1 , Z_2 , R_3 , R_4 を用いてあらわせ。

$$Z_1 R_3 = Z_2 R_4$$

(4) (3) の平衡条件式において左辺右辺の実部が等しいことから, R_3/R_4 を R_1 , R_2 , C_1 , C_2 を用いてあらわせ。

$$R_3 \left(\frac{1}{\frac{1}{R_1} + j\omega C_1} \right) = R_4 \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)$$

$$\frac{R_3}{R_4} = \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right) \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + j\omega C_1 R_2 + \frac{1}{j\omega C_2 R_1}$$

この実部どうしを比較すると,

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}$$

(5) (3) の平衡条件式において左辺右辺の虚部が等しいことから, 角周波数 ω を R_1 , R_2 , C_1 , C_2 を用いてあらわせ。

同じく, この虚部どうしを比較すると

$$j\omega C_1 R_2 = -\frac{1}{j\omega C_2 R_1}$$

$$\omega C_1 R_2 = \frac{1}{\omega C_2 R_1}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

となる。